Trabajo Fin de Máster

Funciones lineales y cuadráticas en la enseñanza de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en 3º ESO: una propuesta didáctica

Linear and quadratic functions for Mathematics Oriented to Academic Teachings in 3rd ESO: a didactic proposal

Autor

Lorién Lascorz Lozano

Directora

Carmen Julve Tiestos

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Año 2020

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

I. Presentación del objeto matemático

En este trabajo se va a presentar una propuesta didáctica dirigida a la enseñanza de funciones lineales y cuadráticas en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en el curso de tercero de Educación Secundaria Obligatoria.

Este tema constituye un caso particular del concepto general de función, de hecho, la unidad didáctica referida a las funciones lineales y cuadráticas suele ir precedida de otra unidad donde se trabajan las funciones. Ambos temas constituyen las unidades vinculadas al bloque de contenidos de Funciones, de acuerdo con el Anexo II de la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo. Los contenidos dirigidos especialmente a las funciones lineales y cuadráticas son los siguientes:

- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Expresiones de la ecuación de la recta.
- Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje establecidos en esta misma orden son las siguientes:

Crit.MAAC.4.2 Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.

Est.MAAC.4.2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.

Est.MAAC.4.2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.

Est.MAAC.4.2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Crit.MAAC.4.3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.

Est.MAAC.4.3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.

Est.MAAC.4.3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

A la vista de lo descrito, es imprescindible poseer cierto conocimiento las propiedades globales de las funciones antes de comenzar a estudiar las funciones lineales y cuadrática. El grado de aprendizaje del concepto de función y sus características determinarán también el grado de aprendizaje del alumnado en el trabajo de esta unidad didáctica, Por ello, a lo largo de todo el trabajo haremos referencia a la introducción del bloque de Funciones en general, y no solo a la propuesta didáctica que comprende este estudio.

II. Campo de problemas, técnicas y tecnologías

Los elementos básicos de las funciones deben ser conocidos por el estudiante al comenzar esta unidad. Por ello, los campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que se pretenden enseñar parten de cierta base sobre el bloque general de funciones. En la siguiente tabla mostramos los campos de problemas que abordaremos en esta propuesta didáctica, relacionándolos con las técnicas y tecnologías:

Tabla 1.

Campos de problemas, técnicas y tecnologías.

Campos de problemas	**Técnicas**	**Tecnologías**
Representaciones de una función lineal y cuadrática: algebraica, gráfica, tabular y lenguaje verbal.	Reconocer la figura en cualquiera de sus expresiones: realización de tabla de valores con la variable independiente y dependiente y representación de estos valores en los ejes de coordenadas.	Definición y representación.
Términos característicos.	Obtención de la pendiente y de la ordenada en el origen de una recta y obtención del vértice y cortes con los ejes a partir de una parábola cualquiera.	Definición y representación.
Ecuación de la recta.	Cálculo de la expresión explícita, implícita de la recta, a partir de dos puntos o de punto-pendiente.	Representación algebraica de una recta.
Posición relativa de dos rectas.	Cálculo de los puntos de corte, pendiente y ordenada en el origen.	Representación gráfica y algebraica.
Contextualización sobre problemas.	Modelización de problemas motivados por una situación de estudio físico, matemático y contexto monetario o estudio de beneficios que se ajusten a una recta o parábola.	Interpretación gráfica y numérica.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objetivo matemático

Esta sección está orientada a abordar las características del proceso de enseñanza-aprendizaje de nuestro objeto matemático y el estado actual del mismo, analizando tanto el marco legislativo como la práctica educativa.

Para poder estudiar la práctica habitual del desarrollo de este proceso, a lo largo de este apartado **se analizarán diferentes libros de texto** de donde observaremos las razones y argumentos que utilizan para abordar las funciones lineales y cuadráticas.

I. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

De acuerdo con la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de Aragón, las funciones lineales y cuadráticas aparecen como objeto a trabajar en el Bloque 4 de contenidos, titulado "Funciones". Los contenidos de dicho bloque son los siguientes:

- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

- Expresiones de la ecuación de la recta.
- Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

De estos contenidos, los dos últimos tienen relación explícita con las funciones lineales y cuadráticas, aunque en realidad los demás contenidos también se trabajan en mayor o menor medida cuando estudiamos nuestro objeto matemático.

Así pues, en el marco legislativo la aparición de las funciones lineales y cuadráticas se da como último punto dentro del bloque dedicado al estudio de las funciones. Se entienden como casos particulares de funciones, cuyo estudio tiene especial interés por su interpretación gráfica y multitud de aplicaciones a la vida cotidiana.

La realidad de la práctica educativa habitual, la trataremos a través del análisis de tres libros actuales, correspondientes a las editoriales *Anaya*, *SM* y *Mc Graw Hill*.

Editorial ANAYA:

Colera J., Oliveira M.J., Gaztelu I., Colera R., (2019)

Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO

En el caso del libro de Anaya, **las funciones lineales y cuadráticas constituyen propiamente una unidad didáctica**. En los temas anteriores se han trabajado los bloques de Números y Álgebra, estudiando en ellos las ecuaciones y sistemas, y se ha comenzado el bloque de Funciones. La temporalización de las unidades refleja que la aparición de **este tema sucede de manera natural al estudiar las funciones y sirve como nexo con el bloque Geometría**, ya que el tema inmediatamente posterior trata sobre “Problemas métricos en el plano”.

En la propia unidad, comienza con una **breve introducción histórica de la aparición de las funciones lineales y el sistema de coordenadas**. Se proponen dos ejemplos claros donde se remarca la utilidad de estas funciones para describir fenómenos físicos: **el vuelo de una mosca y el movimiento de un muelle con peso en el extremo**. Las primeras lecciones tratan sobre las funciones lineales y su representación como rectas, haciendo hincapié en el manejo de conceptos como la pendiente y ordenada en el origen.

A pesar de esta introducción, en general, desde este libro se apuesta por la enseñanza de conceptos teóricos y de una serie de técnicas analíticas y gráficas para el cálculo de los puntos característicos. La aplicación de estas técnicas se trabaja en problemas contextualizados al final del tema. Apenas se presentan situaciones reales que motiven la aparición de ciertos términos o técnicas.

Editorial Mc Graw Hill:

Alcalde J., Amelivia A., Gonzalez J., Jiménez S., (2019)

Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO

En el libro de Mc Graw Hill, las funciones lineales y cuadráticas se encuentran dentro de la unidad didáctica 12: “Funciones elementales”. Tal y como se plantea desde Anaya, este tema viene precedido de otro donde se trabajan las funciones en general, y es en este tema 12 donde se estudian los casos particulares de las funciones lineales y cuadráticas. Además, también aparece en esta unidad las funciones parabólicas como “funciones de proporcionalidad inversa”.

Respecto a la secuenciación didáctica, **el bloque de Funciones se presenta una vez trabajado el álgebra y la geometría**, y previamente al de Estadística y Probabilidad. No parece haber un nexo evidente entre ambos bloques, aunque el estudio de diferentes formas de representación de funciones (gráfica, tabla, analítica,…) es fundamental para el posterior trabajo en los temas.

Al comienzo del tema, **se justifica la necesidad de la representación gráfica de ciertos fenómenos mediante la exposición de una situación real cuya**

modelización se obtiene a través de una recta. En el desarrollo de los apartados del tema, se describe un **planteamiento fundamentalmente teórico y técnico**, detallando los términos matemáticos que intervienen y subdividiendo los distintos casos en apartados diferenciados: funciones de primer grado y funciones constantes se presentan como dos tipos de funciones distintas.

La propuesta de Mc Graw Hill es similar a la de ANAYA, se parte de un estudio y trabajo teórico, desde un ámbito puramente matemático y analítico, y la aplicación de todo este trabajo a problemas contextualizados aparece en los problemas al final de la unidad didáctica.

Editorial SM:

Alcaide F., Hernández J., Serrano E., Moreno M., Pérez A., (2016)

Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO

La propuesta didáctica de la editorial SM divide las 14 unidades didácticas en 4 bloques de contenidos: *Números y álgebra, Geometría, Funciones* y *Estadística y Probabilidad.* Aunque sigue la terminología de los bloques propuestos en la Orden ECD/489/2016, los contenidos difieren en ciertos aspectos. En particular, el bloque de *Funciones* en este libro lo componen 3 unidades *Sucesiones, Funciones* y *Funciones lineales y cuadráticas*, a pesar de que en el currículo oficial de Aragón, coloca a las sucesiones como un objeto matemático dentro del bloque de Números y Álgebra.

Así pues, esta propuesta didáctica reserva una unidad didáctica a trabajar las funciones lineales y cuadráticas exclusivamente, como en el caso de ANAYA. En relación a la temporalización, en este libro se plantea la misma que en el libro de Mc Graw Hill (salvo el tema de Sucesiones): **el bloque de Funciones se presenta una vez trabajado el álgebra y la geometría**, y previamente al de Estadística y Probabilidad.

En la página introductoria, se comenta una situación real donde se pone de manifiesto una relación lineal entre magnitudes de contexto económico. Fuera de estas páginas, **el enfoque es analítico**. El acercamiento primero desde la primera línea de texto **es puramente matemático y descontextualizado**. A lo largo de las lecciones, reserva dos apartados (uno para funciones lineales y otro para cuadráticas) para las aplicaciones de los conceptos y técnicas trabajadas al margen de su aplicación. Cabe destacar ciertos ejercicios y **propuestas de actividades para realizar con GeoGebra.**

En este libro, es más evidente que l**a propuesta por parte de las editoriales deja apartada la justificación de la aparición de los objetos matemáticos. Se trata de una enseñanza basada en la ejercitación de técnicas, los tres libros proponen al final de las unidades o como apartados diferenciados, la resolución de problemas.**

En mi opinión, precisamente **la resolución de situaciones problemáticas deberían situarse en el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones,** incluyendo momentos de ejercitación de técnicas y para afianzar la resolución de problemas.

II. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Presentamos la siguiente tabla para relacionar la aparición de los diferentes campos de problemas en los libros de texto seleccionados:

Tabla 2.

Campos de problemas en los libros de texto.

Campos de problemas	Anaya	SM	M. G. H.
Representación gráfica desde su expresión algebraica.	✔	✔	✔
Hallar ecuaciones desde una representación gráfica.	✔	✔	✔
Diferenciación entre funciones “lineales”, “afines” y “constantes”.			✔
Reconocimiento de ecuaciones y representaciones hiperbólicas.			✔
Interpretación de los coeficientes algebraicos en términos gráficos.	✔ (solo rectas)	✔	✔
Posición relativa de dos rectas en el plano.		✔	✔
Ecuación de la recta dados dos puntos.	✔	✔	✔
Expresión implícita y explícita de la ecuación de la recta.		✔	✔
Cálculo de la pendiente y ordenada (f. lineales).	✔	✔	✔
Cálculo de vértice (f. cuadráticas).		✔	✔
Puntos de corte entre dos funciones.	✔	✔	✔
Contextualización en magnitudes físicas.	✔	✔	✔
Contextualización en otros ámbitos matemáticos.		✔	
Contextualización en términos económicos.	✔	✔	✔

Las técnicas y tecnologías asociadas a estos campos de problemas son los siguientes:

Tabla 3.

Técnicas y tecnologías asociadas a los campos de problemas de la Tabla 2.

Campos de problemas	**Técnicas**	**Tecnologías**
Representación gráfica desde su expresión algebraica.	Reconocimiento de la figura, determinar los puntos elementales para su representación.	Definición y representación gráfica.
Hallar ecuaciones desde una representación gráfica.	Calcular los elementos necesarios para determinar algebraicamente la figura (pendiente, origen, vértice…).	Definición y representación gráfica.
Diferenciación entre funciones “lineales”, “afines” y “constantes”.	Reconocimiento del tipo de función a partir de su expresión algebraica o gráfica.	Definición.
Reconocimiento de ecuaciones y representaciones hiperbólicas.	Conocimiento de las funciones hiperbólicas y sus características.	Definición y representación.
Interpretación de los coeficientes algebraicos en términos gráficos.	Relación entre los diferentes métodos de representación.	Representación gráfica.
Posición relativa de dos rectas.	Estudio de los puntos de corte y pendientes.	Representación gráfica.
Ecuación de la recta dados dos puntos.	Cálculo de la pendiente e interpretación.	Representación.

Expresión implícita y explícita de la ecuación de la recta.	Relación entre los diferentes métodos de expresión algebraica.	Definición.
Cálculo de la pendiente y ordenada (funciones lineales).	Obtención de los términos pendiente y ordenada a partir de una expresión de la recta cualquiera.	Definición.
Cálculo de vértice (funciones cuadráticas).	Obtención del término vértice a partir de una expresión de la parábola cualquiera.	Definición.
Puntos de corte entre dos funciones.	Cálculo de puntos coincidentes entre rectas.	Definición y representación gráfica.
Contextualización en magnitudes físicas.	Problemas motivados por una situación de estudio físico.	Interpretación gráfica.
Contextualización en otros ámbitos matemáticos.	Problemas relacionados con cálculos de geometría o estadística.	Interpretación numérica.
Contextualización en términos económicos.	Problemas de contexto monetario o estudio de beneficios.	Interpretación numérica y gráfica.

III. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

En los dos apartados anteriores hemos expuesto cómo introducen y trabajan los libros de texto el tema de las funciones, y en concreto, el de las funciones lineales y cuadráticas. El enfoque de los libros es una propuesta clásica, donde la organización parte de una exposición teórica, puramente matemática, descontextualizada, y posteriormente se da paso a trabajar actividades de ejercitación de la técnica.

La carencia más evidente en esta propuesta es la **falta de motivación para la aparición de estos objetos matemáticos**. Es importante justificar mediante contextos reales cuando tratamos de introducir un nuevo objeto matemático. Uno de los efectos sobre el **aprendizaje de los estudiantes al no producirse esta contextualización es que los éstos entienden que dicho objeto y la técnica que subyace a los problemas se ha de memorizar y repetir, sin comprender la verdadera razón de por qué lo están estudiando**. Esto produce que las matemáticas parezcan algo ajeno y por tanto no surge interés.

Además, **las investigaciones en Educación Matemática destinadas a abordar la enseñanza de las funciones en Educación Secundaria**, dirigen la atención al manejo de los diferentes sistemas de representación de funciones como punto base para el aprendizaje de este objeto matemático. Estos estudios suelen tener como referencia la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas propuesta por Duval (1993). Según Duval, el aprendizaje y el dominio sobre un objeto se alcanzan mediante los sistemas de representación. El estudio de éstos, conocerlos y ser capaz de pasar de unos sistemas a otro es parte fundamental del aprendizaje.

Para Duval, para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas:

1) Presencia de una representación identificable que permita al estudiante reconocerla.
2) Transformación de esta representación dentro del mismo registro en el que ha sido presentada.
3) Conversión de la representación a otra de un registro diferente, que conserve la totalidad o parte del significado inicial.

Soto, Herrera y Pereyra (2019) realizan un estudio sobre las dificultades en el aprendizaje de la función lineal, basándose también en la teoría de registros semióticos de Duval. Tras analizar ejercicios realizados por alumnos, señalan la existencia de errores en la expresión verbal (debido seguramente a la falta de práctica) y **concluyen que la falta de congruencia en la conversión entre representaciones es la principal dificultad encontrada, destacando la conversión entre los registros gráfico y algebraico.**

En esta misma línea, Arce y Ortega (2013) realizan un estudio sobre las deficiencias en la expresión gráfica de funciones en estudiantes de 1º de Bachillerato. Estas carencias las presentan en cuatro categorías:

- Deficiencias relacionadas con el concepto de función: problemas con el dominio o puntos con varias imágenes.
- Deficiencias relacionadas con el concepto de asíntota: la rama asintótica de la función no se aproxima hacia la asíntota, sino que se traza paralela a ella, o incluso se aleja.
- Deficiencias relacionadas con la asignación y uso de escalas en los ejes cartesianos: la elección de la escala es inadecuada o inexistente en algunos ejemplos. Cabe destacar el incremento notable de esta carencia en alumnos que cursan bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales.
- Deficiencias relacionadas con las características de las funciones: intervalos de crecimiento-decrecimiento, representación del vértice, simetrías, etc.

En niveles avanzados, la complejidad del gráfico aumenta y reaparecen dificultades advertidas en edades anteriores (Fabra y Deulofeu, 2000). En este sentido, se recomienda recuperar prototipos sencillos como las funciones lineales y cuadráticas, para afianzar términos que se están generalizando.

Durante la realización del Practicum II en los meses de abril y mayo de 2020, hemos podido trabajar el tema de funciones lineales y cuadráticas con un grupo de 3º de ESO de Matemáticas Académicas. Debemos destacar que la docencia durante estos meses fue telemática, debido a la crisis sanitaria del COVID-19, y el libro de texto tuvo gran peso en el aprendizaje. Los ejercicios trabajados corresponden a problemas de la Unidad Didáctica 9 "Funciones lineales y cuadráticas" del libro *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO,* editorial ANAYA. Hemos podido observar en sus producciones las siguientes dificultades:

- **Los errores propios del estudio de funciones no aparecen tan frecuentemente**, ya que antes de entrar en esta unidad, han trabajado el tema de Funciones en el que habrán aparecido estas dificultades. Sin embargo, en algún caso siguen surgiendo **dificultades con propiedades globales**, como en el **uso de los ejes de coordenadas, debido a un mal entendimiento de variables dependiente-independiente**. Por ejemplo, en los ejercicios 24 y 25 de la página 176 del libro de texto de ANAYA, se encontraron errores que aparecen en la Figura 1.

24. En una heladería A venden el helado a 5€/litro, y cobran 1€ por un envase, sea del tamaño que sea. En otra heladería B cobran 0.50€ por un envase y 6€/litro de helado.

a) Representa la función litros de helado - coste para cada heladería y escribe sus ecuaciones.
b) Analiza cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de helado que compremos.

25. El servidor de Internet GUAYANDÚ tiene la tarifa GUAY, con cuota fija mensual 20€ y 0,01€/minuto. El servidor JOMEIL tiene la tarifa CHUPY, sin cuota fija y 0,02€ por minuto.

a) Haz una gráfica de cada tarifa en función del tiempo y escribe sus expresiones analíticas.
b) ¿A partir de cuántos minutos mensuales es más rentable GUAY que CHUPY?

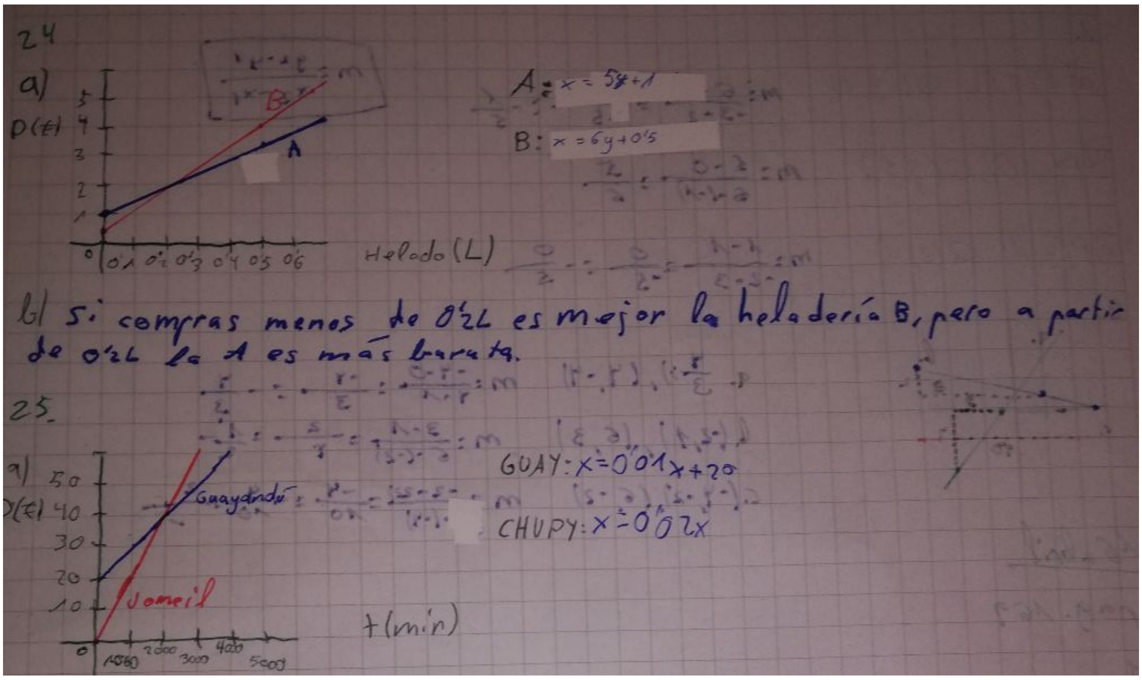


Figura 1. *El alumno no controla los conceptos de variables dependientes-independientes. En el ejercicio 24, intercambia la* x *y la* y *, mientras que en el 25, denomina a ambas variables* x.

- Otra característica en las dificultades heredado de una comprensión incompleta de las funciones en general, **es una mayor confianza en la interpretación gráfica que en la analítica**. Al ser una expresión menos abstracta, se recurre a interpretar la realidad desde la gráfica antes que desde su expresión algebraica. Por ejemplo, en los mismos ejercicios que anteriormente, en algún caso la interpretación final de los valores críticos se hizo desde la gráfica, no desde un razonamiento algebraico (ver Figura 2).

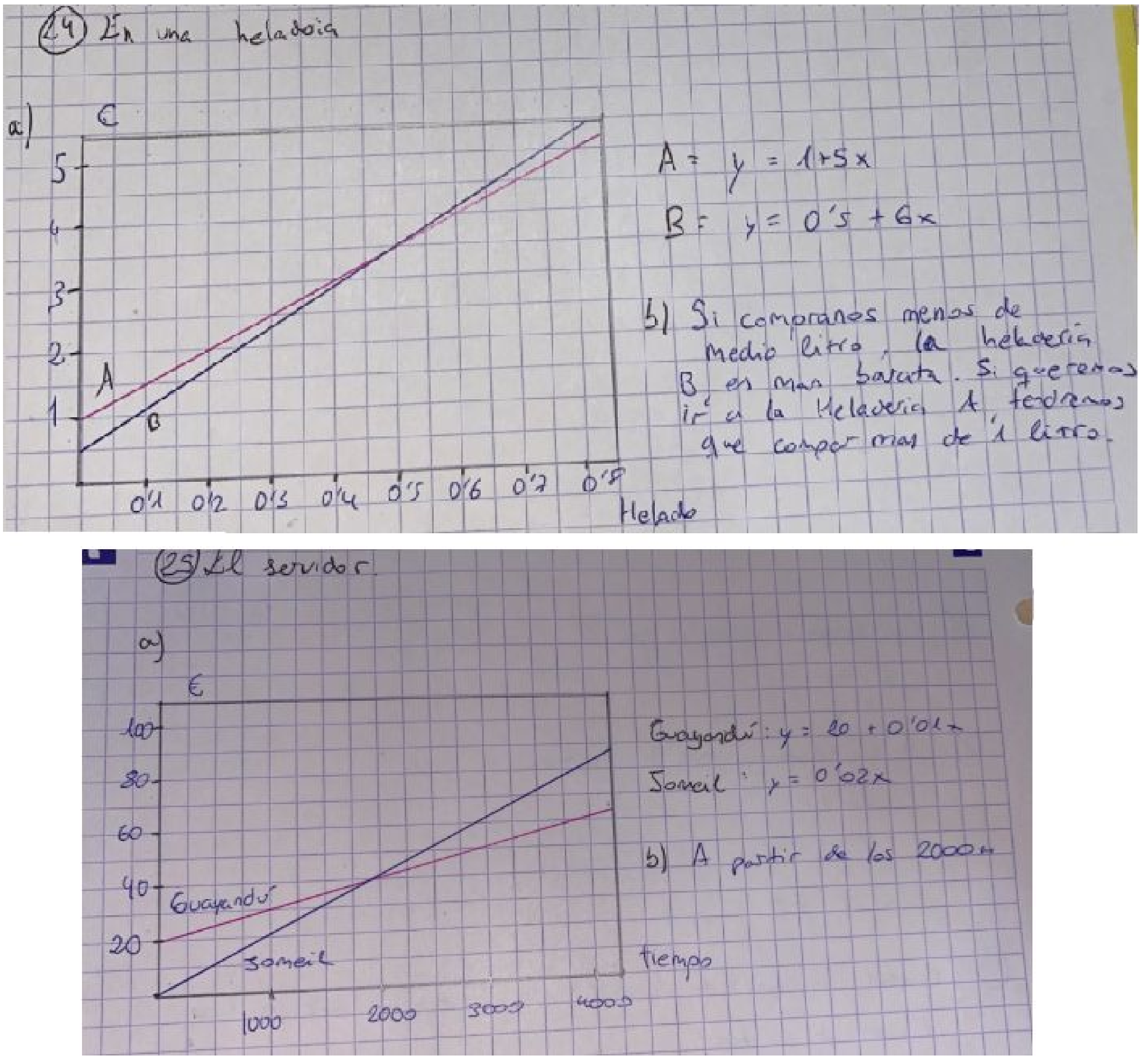


Figura 2. *En los dos ejercicios, obtiene las rectas gráfica y algebraicamente correctamente, y utiliza la gráfica para interpretar y contestar "a ojo" al segundo apartado.*

- Aunque también sucede el efecto contrario. En ocasiones, el razonamiento algebraico se presenta como un método cerrado, con unos pasos determinados a aplicar y exacto. Es por eso que la **solución algebraica suele ser más convincente para el alumno que la gráfica**, incluso cuando no concuerdan. En la siguiente producción del ejercicio 25, el alumno comete un fallo en la resolución algebraica y no concuerda con la gráfica, sin embargo, la da por buena, como podemos ver en la Figura 3.

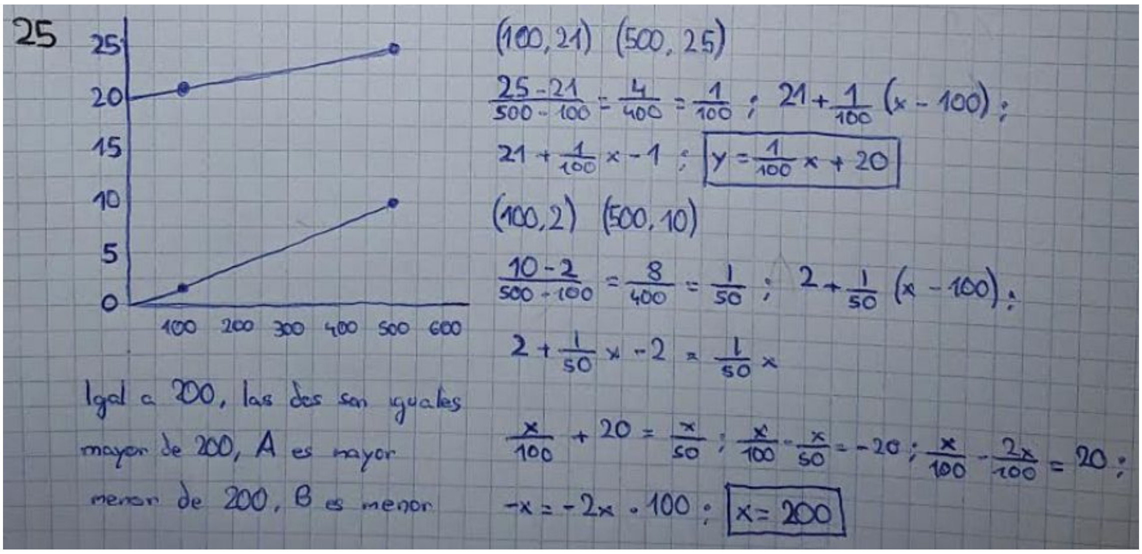


Figura 3. *La solución algebraica indica que el corte entre rectas y en la gráfica, claramente las rectas no se cortan en ese punto. El alumno, sin embargo, da validez a la solución obtenida por razonamientos algebraicos.*

- Las técnicas que se presentan desde el libro, a menudo son algoritmos que mecanizan las operaciones. Esta automatización de los ejercicios limita la capacidad de reflexión perdiendo la perspectiva del sentido de cada paso. **Muchos de los errores detectados se deben a esta mecanización de las técnicas.**

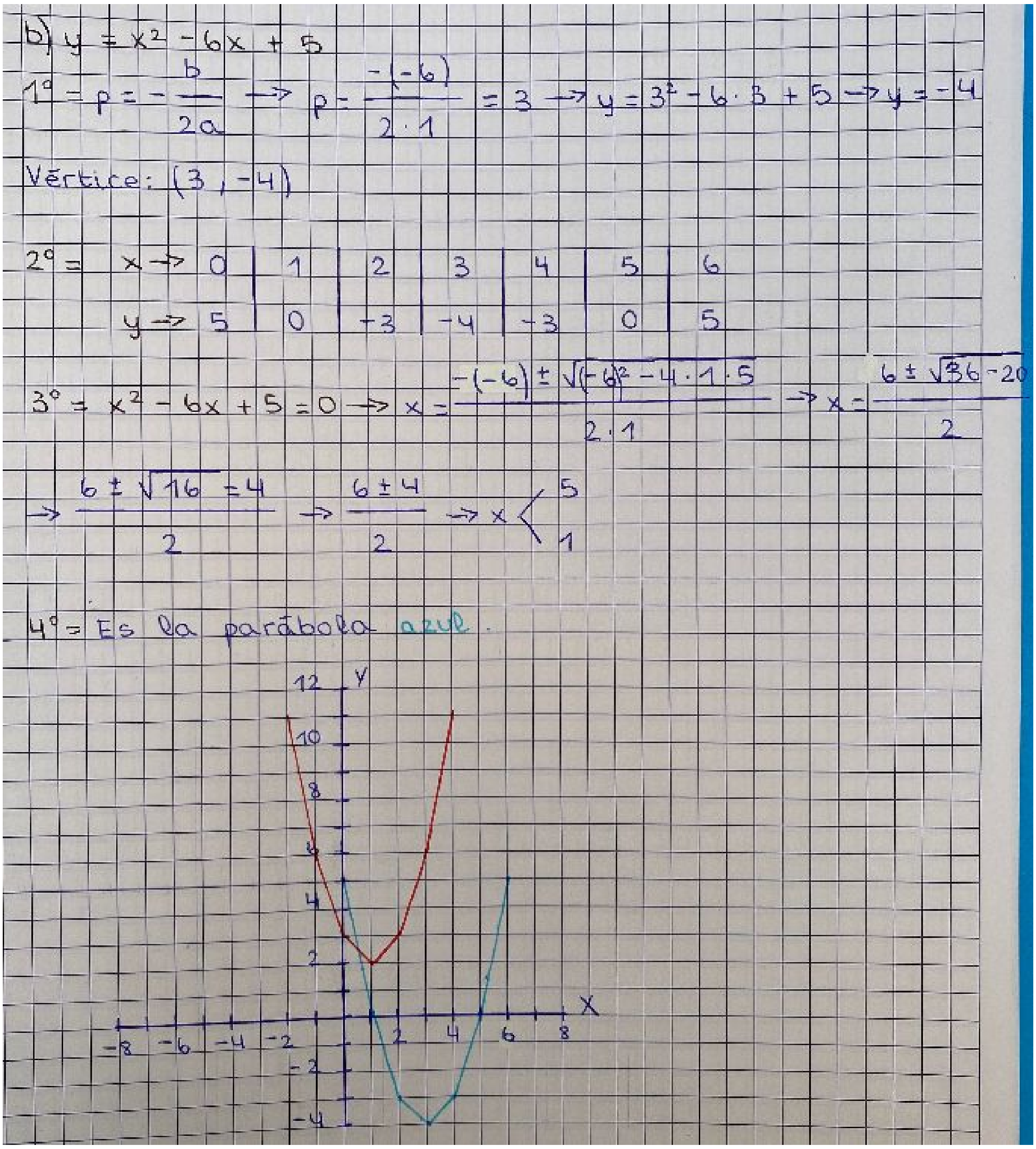


Figura 4. *En el ejercicio 2 de la página 172 se pide que representen gráficamente las parábolas expresadas algebraicamente. El libro muestra en un ejercicio resuelto, los cuatro pasos a seguir para resolver estos ejercicios, y muchos alumnos siguieron estrictamente estos pasos.*

- También, **la automatización de los ejercicios incita al alumno a no leer todo lo que se pide en el ejercicio**, sino que se limita a aplicar el algoritmo y no termina el ejercicio. En muchos casos, como en el siguiente ejemplo, el cálculo de la ecuación de la recta queda limitado al cálculo de la pendiente, ya que es el paso mecanizado.

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

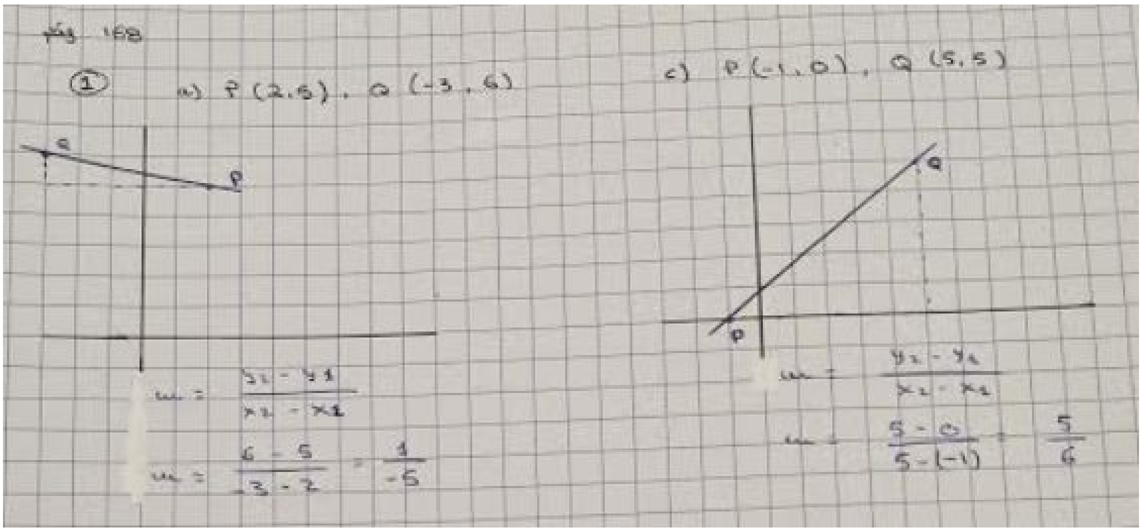


Figura 5. *En este ejercicio, varios alumnos se limitaron a calcular la pendiente de la recta, ya que es la parte mecánica del ejercicio.*

- En ciertos problemas, se han tenido **dificultades en la modelización** de las situaciones reales en expresiones gráficas o algebraicas.

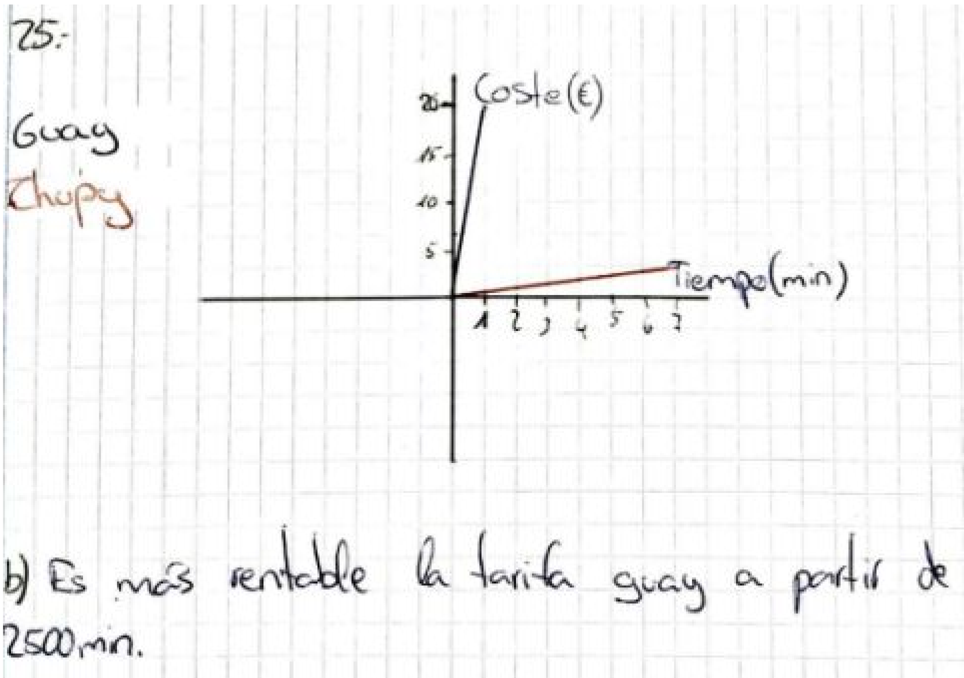
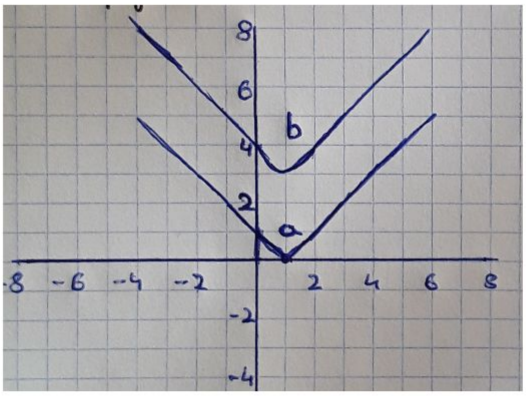


Figura 6. *El alumno no interpreta bien la relación de Coste-Tiempo y su modelización mediante variables dependientes-independientes.*

- La gráfica de la función lineal la han trabajado en cursos anteriores y es sencilla de comprender. En cambio, **la representación gráfica de la parábola conlleva ciertos problemas de comprensión.** La función cuadrática es una curva suave cuyas ramas tienden a infinito, cada vez más verticales pero sin ser asíntotas. Estas características no se acaban de comprender y pueden producir dificultades en el trazado de la gráfica.



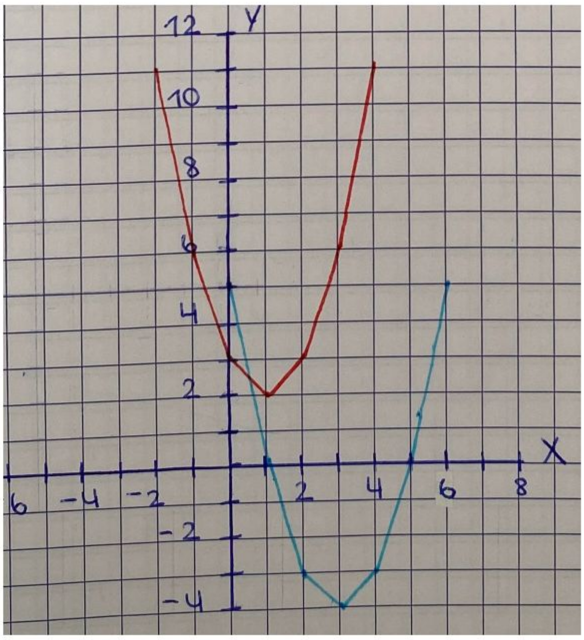


Figura 7. *En estos ejemplos se ve las deficiencias en el concepto de parábola, en concreto en su trazado.*

Del estudio de las dificultades en el aprendizaje de las funciones, podemos extraer directrices hacia las que dirigir nuestra propuesta didáctica. Intentaremos trabajar la identificación, la transformación y la conversión entre las expresiones verbales, tabulares, gráficas y algebraicas de las funciones lineales y cuadráticas.

Durante el aprendizaje, el docente ha de tener presente las tareas cognitivas que surgen en el estudio y mostrar los problemas en función del desarrollo en el aprendizaje. Debemos otorgar **especial importancia al estudio de los diferentes modelos de representación, especialmente a la descripción verbal**, ya que es la primera en aparecer en orden de abstracción y posibilita el buen entendimiento de todas las demás. A menudo, esta descripción es olvidada por libros de texto y docentes, por no tratarse de una tarea cerrada y mecánica, sino que conlleva un esfuerzo de entendimiento y no solo memorización. Tal y como señalan Azcárate y Deulofeu (1990), hemos visto que los campos de problemas suelen dedicarse a la conversión entre dos sistemas de representación que conlleve un proceso más mecánico y menos interpretativo. Muchas de las deficiencias encontradas en los estudios analizados reflejan la falta de práctica de esta expresión verbal por parte de los alumnos, que conlleva a una sistematización de los métodos de estudio de las funciones con ausencia de interpretación, relegando todo el trabajo a la conversión mecánica a la expresión algebraica y gráfica.

Finalmente, **la modelización ha de ser la justificación principal de la aparición de las funciones lineales y cuadráticas, ya sea en modelos dentro de las matemáticas o fuera de ellas**. Esta consideración se refleja en la legislación, sin embargo no está del todo presente en los libros de texto, y por lo tanto tampoco en el aula. Como hemos visto, todos los estudios apuntan hacia la modelización como motivación en el desarrollo del aprendizaje.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

I. Conocimientos previos necesarios para afrontar el aprendizaje del objeto matemático

Cuando un estudiante se inicia al estudio de las funciones lineales y cuadráticas, se debe haber trabajado previamente competencias como la representación gráfica y, claramente, debe estar asentado el concepto de función matemática.

En general, para introducir el aprendizaje de los objetos matemáticos contenidos en el bloque de Funciones, es necesario un cierto nivel de conocimientos sobre expresiones algebraicas.

A lo largo de este apartado, detallaremos qué objetos y técnicas han de controlar los estudiantes antes de adentrarse en el tema de funciones lineales y cuadráticas. Además, mostraremos cómo aseguraremos que los alumnos posean dichos conocimientos previos.

II. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

En este apartado, presentamos una revisión de los contenidos matemáticos estudiados por los alumnos en los cursos previos a 3º de la ESO, y también los que deben estudiar durante el propio curso antes de comenzar a trabajar el tema de funciones lineales y cuadráticas.

- **Educación Primaria**

En el Anexo II de la Orden ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, se recogen los contenidos matemáticos (y de todas las asignaturas) que se estudian a lo largo de esta etapa. El concepto de función matemática no aparece en esta etapa de manera explícita, por lo tanto, tampoco el de función lineal y cuadrática. Esto se debe a que el concepto de función es una idea excesivamente abstracta para el nivel de madurez cognitiva que tienen los niños y niñas antes de los 12 años. Sin embargo, cabe destacar que ciertas nociones de representación gráfica ya están presentes en los últimos cursos de esta etapa. Por ejemplo, algunos de los contenidos del bloque 4 de Geometría en 6º de Primaria son los siguientes:

- Posiciones relativas de rectas y circunferencias.
- Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos.
- La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.

Por tanto, aunque no se desarrolle el concepto abstracto de función ni se trabaje el álgebra, se están sentando las bases para la representación de rectas y otros tipos de funciones.

- **Educación Secundaria**

En los dos primeros cursos de la ESO, se comienzan a trabajar generalizaciones y conceptos abstractos: empieza el álgebra y, con ella, las funciones. De acuerdo con el Anexo II de la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, las funciones son un papel importante en estos dos cursos, ya que forman su propio bloque de contenidos. Además, en el bloque 1 de ambos cursos se indican competencias relacionadas con las funciones y las representaciones gráficas: “Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

a) la recogida ordenada y la organización de datos;

b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos;

c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico;

d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas;”

En particular, en 1º ESO se continúa con el estudio de las coordenadas cartesianas comenzado en Primaria y se introducen los conceptos de función, variables dependientes/independientes y proporcionalidad directa. Además, aparece la representación de una función con fórmula, además de las ya conocidas gráfica, tabla y lenguaje habitual.

En cuanto a 2º ESO, se refuerzan los contenidos vistos en primero y se amplían algunos de ellos. De hecho, se presenta la función lineal. Los contenidos nuevos para este curso son los siguientes:

- Estudio del crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, continuidad y discontinuidad y cortes con los ejes.
- Funciones lineales: interpretación, pendiente de la recta y representación gráfica y fórmula (ecuación).
- Utilización de medios tecnológicos como calculadora u ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

● **Curso actual: 3º ESO**

En el currículo de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas del curso 3º ESO, las funciones aparecen en el bloque 4 de contenidos, por lo que, si el docente sigue el orden indicado en la legislación, los estudiantes habrán trabajado ya los bloques de Números y Álgebra y Geometría antes de comenzar con las funciones. En particular, antes de comenzar a estudiar las funciones lineales y de introducir el concepto de función cuadrática, habrán repasado y extendido aspectos generales de las funciones como las diversas formas de representación e interpretación y dependencia.

Si la secuencia didáctica del docente no sigue el orden de los bloques establecidos por la ley, se ha de tener en cuenta que antes de comenzar a trabajar las funciones lineales y cuadráticas se debe estudiar durante el presente curso el bloque de Álgebra, ya que familiarizarse con expresiones algebraicas de orden 1 y 2 es esencial para realizar nuestra propuesta didáctica con éxito. Además de haber trabajado en el tema inmediatamente anterior, el tema de funciones. En concreto, se deberían estudiar los conceptos:

- Definición de función y representaciones.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Tendencias.
- Continuidad y discontinuidad.
- Expresiones analíticas.

III. Medidas para asegurar que todos los alumnos posean los conocimientos previos citados

Antes de proponer las actividades referidas al tema de funciones, hemos de conocer cuál es el nivel real de la clase con respecto a estos objetos matemáticos. Notar que esta evaluación del nivel se ha de realizar al comienzo del bloque, es decir, al comenzar la primera unidad didáctica referida a las funciones, ya que muchos de los conceptos que más dificultades genera en los estudiantes son aspectos generales de las funciones, no solo de las lineales y cuadráticas.

Así pues, **reservaremos una sesión para dedicarla a realizar un recordatorio a modo de debate entre los alumnos, guiado por el docente, en el que se nombre los conceptos "coordenadas cartesianas", "continuidad", "extremos relativos" y "función lineal"**, ya que las funciones cuadráticas constituyen un elemento nuevo en el currículo de 3º ESO. Este debate ocupará aproximadamente la mitad de la sesión, la otra mitad se destinará a realizar una prueba inicial sobre estos conceptos. En mi opinión, es importante crear el debate antes de la realización de la prueba, ya que muchos de los conceptos los entienden y tan solo hace falta un pequeño recordatorio para que demuestren que los conocen.

La prueba será individual e irá orientada a recordar los términos citados anteriormente y nos permitirá conocer el nivel de los alumnos. Además, a partir de los resultados obtenidos, podremos comenzar a plantear problemas que justifiquen la aparición del tema que vamos a trabajar.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

I. ¿Cuáles es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

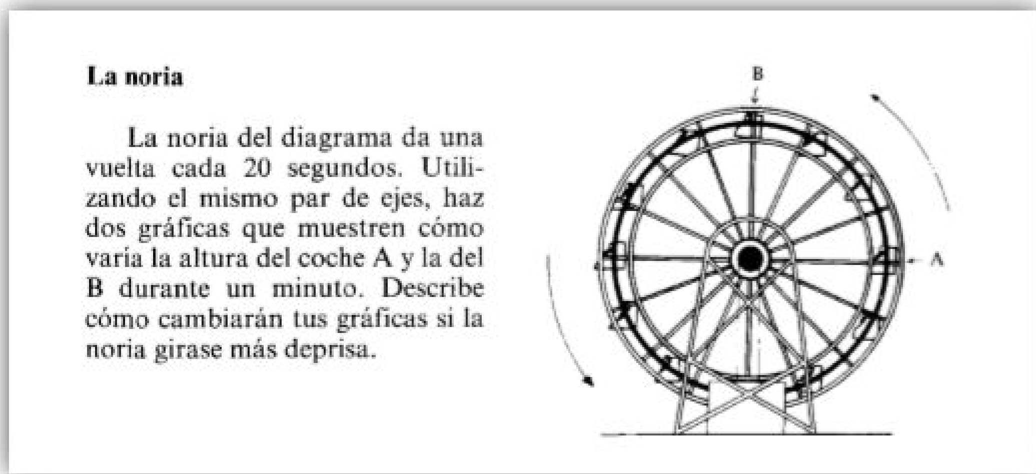
Cuando se presenta un nuevo objeto matemático, es importante justificar su aparición para que se entienda que el estudio de éste es necesario. En general, las funciones las vamos a presentar como la herramienta para **modelar matemáticamente diferentes situaciones de la vida real.** El aprendizaje a través de la resolución de problemas ha de ser el motor principal de la docencia de las matemáticas, y especialmente importante en las funciones. Se trata de un concepto abstracto pero que modeliza una realidad. A partir de problemas de contexto real se trabajará en su abstracción y se razonará su utilidad.

Además de la aparición, el **conocimiento del trabajo técnico con estas funciones** será fundamental **interpretar las distintas representaciones** de estas funciones y sus características. Muchos autores de la investigación en Educación Matemática indican que el verdadero aprendizaje y conocimiento sobre las funciones se consigue a través del manejo completo de los diferentes sistemas de representación. Las tareas cognitivas de Duval (identificación, transformación y conversión) han de trabajarse jerárquicamente, de manera que el alumno construya la definición completa de función desde todos los registros de representación.

En la sección anterior de este trabajo, hemos dado gran importancia a los conocimientos previos sobre álgebra que debe tener el alumnado para lograr entender los conceptos matemáticos comprendidos en el tema de funciones. Efectivamente, **partir de conocimientos algebraicos es esencial para el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero la razón de ser de las funciones es su modelización de la realidad, y es importante saber interpretar y expresar la realidad.** Por ello, comenzaremos con actividades que potencien la necesidad de las funciones para dicha modelización y su expresión oral y gráfica, al margen del álgebra.

En este sentido, **el libro *El lenguaje de funciones y gráficas (Shell Center)* propone una serie de actividades de iniciación en las que no es necesaria el álgebra**

para resolverlos. Estos ejercicios inciden en la representación gráfica de funciones como motivación de las funciones. Un ejemplo interesante es el siguiente:



La noria

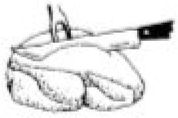
La noria del diagrama da una vuelta cada 20 segundos. Utilizando el mismo par de ejes, haz dos gráficas que muestren cómo varía la altura del coche A y la del B durante un minuto. Describe cómo cambiarán tus gráficas si la noria girase más deprisa.

Figura 1. *Actividad "La noria"*

Para nuestro caso particular, las funciones lineales y cuadráticas representan fenómenos muy frecuentes en el día a día. Comportamientos propios del mundo físico son contextos muy propicios para motivar la introducción de nuestro objeto matemático. Por ejemplo, cualquier movimiento influenciado por la gravedad es una situación muy común y se puede modelizar mediante una función cuadrática.

De nuevo en el libro *El lenguaje de funciones y gráficas (Shell Centre)* proponen también actividades para la realización de gráficas a partir de tablas. Para proponer actividades que justifiquen la aparición de las funciones lineales y cuadráticas, el cambio de representación gráfica a representación en forma de tabla y viceversa puede ser una buena herramienta de comienzo, ya que esta técnica la han trabajado en el tema anterior de funciones. Un ejemplo del mismo libro sobre este tipo es el siguiente:

Tiempo de cocción del pavo



Peso (Kgs)	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo (horas)	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6

Figura 2. *Actividad "Tiempo de cocción del pavo"*

Este es un ejemplo de actividad para representar una función lineal. Esta situación sencilla, puede dar pie a comentar ideas generales sobre conceptos como pendiente o dar unas pequeñas predicciones para otros valores no incluidos en la tabla.

II. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

En este apartado detallaremos las razones de ser históricas que han dado lugar a la aparición de las funciones. No particularizaremos excesivamente en las funciones lineales y cuadráticas ya que entendemos que el origen temporal es el mismo, surgen de la modelización de realidades particulares.

Para organizar la revisión histórica, dividiremos la línea temporal en las cuatro edades históricas.

EDAD ANTIGUA

Este período comprende el tiempo entre el origen de la escritura hasta la caída del imperio romano en el siglo V d.C. En líneas generales, durante esta época no existe la idea abstracta de variable, y por tanto, tampoco de función, ni una simbolización explícita de ella. Sin embargo, sí que aparecen ciertas aproximaciones o usos implícitos de lo que hoy llamamos funciones.

En Babilonia, consiguieron desarrollar resultados algebraicos bastante avanzados y **contaban con las tablas numéricas (*tablas numéricas babilónicas*) que**

representaban resultados de funciones como la multiplicación o la raíz cuadrada. Posteriormente, en Grecia se produjo un gran interés por la Geometría y las primeras leyes de la cinética.

Figura 3. *Tabla babilónoca "Plimpton 332"*

(Imagen obtenida de Feito M. y Sandoval J., Matemáticas y competencias básicas a partir de la tablilla Plimpton 322 (1), Suma 77, Noviembre 2014.)

EDAD MEDIA

Esta época se alarga hasta el año 1492, cuando Colón llega a América y cae el Imperio Romano. Con respecto a la ciencia, durante esta época se comenzaron a estudiar **fenómenos naturales como calor, luz, distancia o movimiento uniformemente acelerado. Esto dio lugar a ideas intuitivas de variables dependientes e independientes.**

En concreto, en regiones árabes e hindúes se potenció el estudio de la trigonometría, motivada por los trabajos en astronomía. En Europa, la ciencia y la cultura tenían un papel secundario, lo que produjo pocos avances en materia de funciones. Sin embargo, se pueden rescatar dos hechos importantes:

- Thomas Bradwardine en el siglo XIV en Oxford, elaboró un "álgebra de palabras" para expresar relaciones de tipo funcional, derivada del estudio de la fuerza y la resistencia.

- Nicholas Oresme en el mismo siglo en París, diseñó unas primeras versiones de las representaciones gráficas de hoy en día. En ellas representaba las magnitudes de velocidad y aceleración.

EDAD MODERNA

Desde 1492 hasta 1789, este periodo está caracterizado por el Renacimiento, movimiento cultural que puso en primera línea a la ciencia y el arte. Un avance muy importante en la evolución y el conocimiento científico fue la invención de la imprenta por Gutenberg.

Con respecto a las funciones, surgen necesidades tanto dentro del propio trabajo de las matemáticas para simbolizar elementos variables o desconocidos, como también en el estudio científico de la naturaleza para representar situaciones o comportamientos gráficamente.

Durante los siglos XVII y XVIII, de la mano de grandes intelectuales como Descartes, Fermat, Newton y Leibniz, las matemáticas experimentan un importante avance en muchos ámbitos. A **Descartes se le considera el padre de las funciones** tal y como las conocemos ahora por varias razones:

Figura 4. *René Descartes.*

(https://es.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes)

- Descartes **propone un sistema de coordenadas**, que daría pie a nuestro actual sistema de coordenadas cartesianas.
- También **desarrolla la idea de función en forma analítica**, dando importancia a la expresión algebraica.
- Asienta **los conceptos de variable y función**, trabajando también relaciones de dependencia/independencia.

Aunque está claro que Descartes contribuyó mucho al desarrollo de las funciones matemáticas, no fue el único que aportó a este campo. Fermat trabajó con ecuaciones para representar ciertas curvas. De hecho, fue él quien encontró en 1629 las ecuaciones de la recta y la parábola, la representación de las funciones lineales y cuadráticas.

Finalmente, la expresión $f(x)$ fue escrita por primera vez por Euler. Éste estableció una primera definición de función con expreso significado gráfico:

"Toda relación entre x e y tal como se representa en el plano mediante una curva trazada a mano libre."

EDAD CONTEMPORÁNEA

Este periodo comienza con la Revolución Francesa en 1789 y perdura hasta nuestros días. Durante este periodo, la ciencia ha avanzado en muchos niveles, con especial velocidad las matemáticas en el siglo XX y XXI.

Con respecto a las funciones, esta época comienza con la publicación de la teoría de funciones por parte de Lagrange en 1797. Cauchy, Lobachevsky, Dirichlet y Riemann continúan ese trabajo y poco a poco van dando rigurosidad a los estudios de Euler.

Figura 5. *Leonhard Euler.*

(https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)

Posteriormente, otros matemáticos como Hausdorff o Bourbaki siguen generalizando y abstrayendo la idea de función para otras áreas de las matemáticas como la topología.

Para finalizar este apartado, debemos indicar la gran importancia que tiene para un docente conocer las razones históricas que justificaron la aparición en la ciencia del objeto matemático que se pretende explicar. Según Sastre Vázquez, Rey, Boubée (2008), “todo profesor de Matemática debiera tener un conocimiento aceptable de la historia de esta ciencia, no con el objetivo de organizar un curso con contenidos históricos, sino para poder utilizar, en el plano del acercamiento del objeto de estudio al alumno, las consideraciones más relevantes de su desarrollo y, sobre todo, para favorecer la comprensión de que esta ciencia evoluciona en el marco del desarrollo socio-cultural de la humanidad”.

III. Diseño de problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

Presentamos a continuación dos problemas para motivar la introducción de estas funciones, uno para funciones lineales y otro para cuadráticas.

El primer problema se trata de un **enunciado que modeliza una situación real y cercana al alumno, donde está presente una función lineal**. Con este problema queremos justificar la utilidad de las funciones lineales potenciando su contextualización. Partimos de la idea de proporcionalidad para introducir la recta e intentaremos hacer predicciones.

PROBLEMA 1

El mismo día que nació mi hermana, mis padres adoptaron un cachorrito recién nacido, Otri. Se dice que un año para los seres humanos equivalen a 7 "años de perro". Si mi hermana tiene ahora 5 años:

a) ¿Cuántos "años de perro" tiene ahora Otri?

b) Representa gráficamente esta situación. ¿Sabes qué nombre tiene esta función?

c) Fijándote en la gráfica, ¿cuántos tendrá mi hermana cuando Otri tenga 56 "años de perro"?

En el segundo problema, un poco más avanzado, **se modeliza una situación a través de una función cuadrática. Partimos de su representación algebraica y trataremos de ejercitar la conversión entre sistemas de representación**. También, trabajaremos la técnica del cálculo del vértice y su interpretación sobre el problema.

PROBLEMA 2

La NASA acaba de enviar un nuevo satélite para orbitar alrededor de Saturno y estudiar su composición a los pocos segundos de despegar se detecta *un fallo en el motor y se pierde el control sobre el satélite, solo se sabe que su trayectoria es la siguiente:*

$$a = 200s - 5s^2$$

En la ecuación anterior, 'a' es la altura en metros y 's' el tiempo en segundos. Si este suceso se ha detectado a los 10 segundos después de que despegara el satélite:

a) ¿A cuántos metros estaba el satélite cuando empezó a fallar?
b) Representa gráficamente la función que describe el satélite.
c) Describe con tus propias palabras la situación que acabas de representar.
d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará?
e) Suponiendo que el satélite sube y baja verticalmente, ¿cuánto tiempo tienen los operarios de la zona para salir del lugar de despegue antes de que caiga el satélite?

IV. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

En este apartado, exponemos cómo vamos a trabajar para presentar la razón de ser en el aula y conseguir la motivación del objeto en la secuencia didáctica.

Como ya hemos comentado, la razón de ser de las funciones lineales y cuadráticas (las funciones en general) se basa en la modelización de situaciones reales. Así pues, vamos a proponer problemas que justifiquen la necesidad de nuestro objeto matemático. Estos problemas se constituirán como razón de ser, para que trabajen un campo de problemas en concreto. En concreto, la metodología a seguir en la sesión inicial es la siguiente:

- Valoración de conceptos previos

  Aprovechando que hemos acabado de ver el tema de funciones, construiremos un debate con toda la clase donde vayamos guiando las ideas para valorar el grado de conocimiento sobre las funciones lineales y cuadráticas.

- <u>Actividades en grupo</u>

Una vez finalizado el debate, dividimos la clase en grupos de 3 alumnos (o 2 si es necesario). Para cada grupo, proponemos una actividad diferente que refleje la necesidad de las funciones lineales y otro de cuadráticas. Proporcionaremos la ayuda necesaria cuando se demande a cada grupo. Posteriormente, habrá una puesta en común de los resultados y discusión de los mismos a nivel de aula. Y por último institucionalización de los conceptos aprendidos de cada campo de problemas.

De las actividades propuestas, la referida a funciones lineales irá dirigida a predecir valores de un fenómeno sencillo, prestando especial atención a la representación gráfica correcta de la recta. Por ejemplo:

Hace dos semanas planté un geranio en una maceta de mi casa. La semana pasada medí cuánto había crecido y anoté 2 centímetros y ¡hoy ya mide 4 cm!

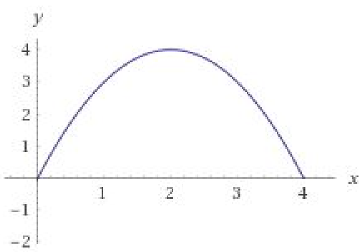
¿Sabrías adivinar cuánto medirá la semana que viene?

Ayuda: dibuja una gráfica donde se vea cómo crece la flor respecto al tiempo.

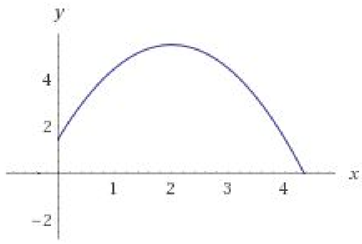
Por otro lado, la actividad sobre las funciones cuadráticas simplemente dará una idea de una situación común modelizada mediante esta función. Un ejemplo puede ser un reconocimiento de la gráfica correspondiente entre otras posibles.

¿Cuál de las siguientes gráficas describe el movimiento de un balón de baloncesto cuando un jugador tira a canasta? (Y: altura en metros, X: distancia en metros)

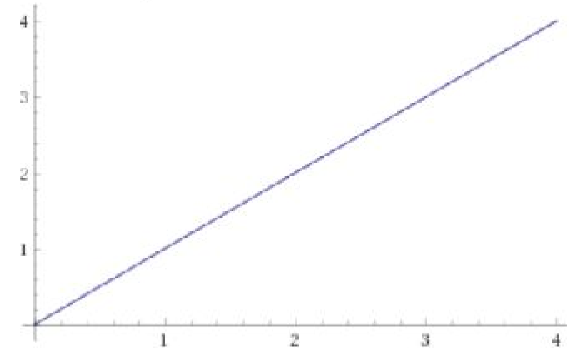
a)



b)



c)



E. Sobre el campo de problemas, las técnicas y las tecnologías

En esta sección del trabajo se va a presentar con detalle el análisis didáctico de nuestra propuesta. Para cada uno de los campos de problemas, diseñaremos distintos tipos de problemas, mostraremos las técnicas o modificaciones sobre la técnica inicial que se ejercitan con estos problemas, la metodología que seguiremos en su implementación en el aula, las tecnologías que van a justificar las técnicas y, finalmente, expondremos cómo se adecúan los momentos de estudio al aprendizaje sobre este campo de problemas. Los problemas propuestos son, la mayor parte, originales, y si existe alguna adaptación o algún ejercicio obtenido de alguna fuente, se explicita en cada caso.

Campo 1. Representación de una función lineal y cuadrática: algebraica, gráfica, tabular y lenguaje verbal

a) Diseño de problemas

Los problemas donde se trabajen los diferentes sistemas de representación de una función, constituirán el campo de problemas central de nuestra propuesta didáctica. Propondremos problemas sobre los que se deban trabajar las tareas de identificación, transformación y conversión entre representaciones, a partir de una situación real.

Problema 1. Mi hermana pequeña tiene solo 5 años. Cuando vamos juntos de paseo, siempre va un poco más lenta que yo porque tiene las piernas más pequeñas. De hecho, por cada dos pasos que doy yo, ella tiene que dar tres.

a) ¿Cuántos pasos dará ella cuando yo dé 6?
b) Representa gráficamente esta situación.
c) Expresa la ecuación que relaciona los pasos de mi hermana y los míos.

Problema 2. Juan lanza al aire la pelota de fútbol. La trayectoria de la pelota está definida por esta ecuación:

$$y = -x^2 + 3x + 1$$

Realiza una tabla de valores para 5 valores de x. Representa gráficamente esta función. Expresa con tus palabras lo que está sucediendo.

Problema 3. El sábado pasado, mi madre rellenó el depósito del coche en una gasolinera donde la gasolina iba a 1,25 € el litro. Mi madre echó 50€, ¿cuántos litros de gasolina rellenó en el coche? Representa gráficamente la función que relaciona el precio y los litros de gasolina . Expresa la ecuación de esta función.

Problema 4. Un ciclista sale de su casa y se da un paseo a velocidad constante de 5 metros por segundo.

a) Representa gráficamente la función que relaciona los metros recorridos y el tiempo trascurrido.
b) Expresa la ecuación que relaciona su posición actual "y" con el tiempo que lleva pedaleando "x".
c) El ciclista quiere hacer en total (entre ida y vuelta) 2 kms. Observando la representación gráfica, ¿en qué momento se dará la vuelta?

b) Técnicas que se ejercitan con estos problemas.

La técnica que se ejercita es el reconocimiento de la funciones en sus diferentes formatos de expresión. **Como ya han trabajado con funciones, tratamos de que se familiaricen con las lineales y cuadráticas** como ejemplo frecuente en la realidad.

Por otro lado, buscaremos acentuar las características que determine el tipo de función al que pertenecen. Rasgos algebraicos y gráficos como la continuidad, intervalos de crecimientos, puntos característicos, etc. También el uso de tablas de valores es una técnica para representar funciones que se ejercita en estos problemas.

c) Metodología en su implementación en el aula.

La metodología que proponemos para la implementación de este campo de problemas es el trabajo colaborativo. Formamos en clase grupos de 3 alumnos para que trabajen en pequeños grupos los tres problemas. Conforme van trabajando, el docente se acerca a los grupos para ayudarles y guiarles en lo que necesiten.

Una vez finalizados los 3 problemas, realizaremos una puesta en común con los resultados y las dificultades que han podido tener. Guiaremos el debate hacia la obtención de los objetivos que buscamos.

d) Tecnologías que justifican las técnicas.

La tecnología que hay detrás de la técnica es la definición de función como relación entre variable dependiente e independiente, y sus diferentes formas de representación.

e) Momentos de estudio.

Para que una secuencia didáctica tenga éxito, deben darse lugar distintas fases del estudio en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cada objeto matemático. Con respecto a este primer campo de problemas, los momentos de estudio tienen lugar de la siguiente manera:

- *Momento de primer encuentro*: en la actividad inicial al leer el enunciado del problema.
- *Momento exploratorio*: ejercicio en grupo, los problemas abordados desde un trabajo colaborativo ponen en juego la búsqueda de técnicas para resolver el problema.
- *Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico:* dentro de los grupos de 3, una vez han llegado al consenso de realizar una

técnica debate sobre la idoneidad de la estrategia. Si no se ha llegado a este punto, el docente es el encargado de evidenciarla.

- *Momento de trabajo de la técnica:* este momento comprende el refuerzo de problemas para asentar la técnica. Esto corresponde a los problemas que incide el docente para casa.
- *Momento de institucionalización y evaluación:* Tras el debate en clase y los ejercicios en casa, al día siguiente el docente explicita todas aquellas propiedades y características que se habían intuido durante la sesión anterior y las dificultades encontradas.

Campo 2. Términos característicos

a) Diseño de problemas

Este campo de problemas **abarca el trabajo técnico de la obtención de los términos pendiente, ordenada en el origen, vértice y cortes con los ejes a partir de una expresión de la recta o de la parábola cualquiera**. En primera instancia, buscaremos transmitir el significado en contextos reales de estos términos, para así justificar la utilidad de conocer su cálculo. Propondremos, también, ejercicios de trabajo de estas técnicas.

Problema 1. Dos nadadores compiten en una carrera en la que tienen que hacer 5 largos a la piscina. El nadador A hizo los 5 largos en el mismo tiempo que el nadador B hizo solo 4. ¿Cuántos largos hizo el nadador B en el tiempo que el A hace un largo?

Problema 2. Juan lanza al aire la pelota de fútbol. La trayectoria de la pelota está definida por esta ecuación:

$$y = -x^2 + 3x + 1$$

¿Cuál es la altura más alta a la que llegará la pelota?

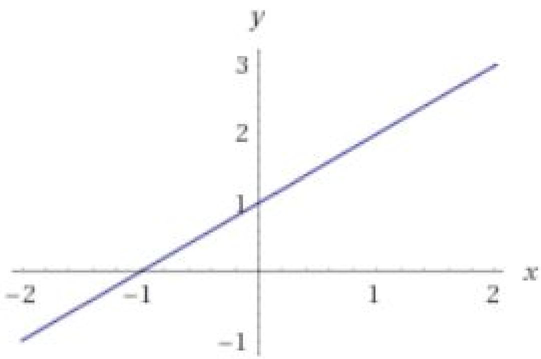
Problema 3. Calcula la pendiente, la ordenada en el origen y los cortes con los ejes de las siguientes rectas:

i) Ecuación: $y = -3x + 2$

ii) Tabla de valores:

X	*0*	*1*
Y	*1*	*7*

iii) Gráfico:



b) Técnicas que se ejercitan con estos problemas.

Las técnicas que se trabajan en este campo de problemas se refieren al cálculo de elementos característicos tales como pendiente, ordenada en el origen y vértice.

c) Metodología en su implementación en el aula.

Este campo de problemas requiere un trabajo más individual, en el que el alumno sea el que individualmente ejercite las técnicas y mecanice el cálculo de estos términos.

Sin embargo, es necesario motivar el significado de estos conceptos en contextos reales. Para ello, construiremos estos significados mediante el debate en clase con las ideas intuitivas que surjan.

d) Tecnologías que justifican las técnicas.

La tecnología que hay detrás de la técnica es la definición de dichos conceptos y su interpretación en los contextos reales.

e) Momentos de estudio.

Con respecto a este segundo campo de problemas, los momentos de estudio tienen lugar de la siguiente manera:

- *Momento de primer encuentro*: en la actividad inicial al leer el enunciado del problema en el que se indique el punto clave o característico a estudiar.
- *Momento exploratorio*: ejercicio en grupo, debate en clase, las ideas intuitivas que van surgiendo se van recogiendo y poniendo en orden para crear un significado común.
- *Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico:* en este caso, el docente es el encargado de señalar las conclusiones comunes y la técnica a trabajar.
- *Momento de trabajo de la técnica:* este momento comprende el refuerzo de problemas para asentar la técnica. En este campo de problemas, tendremos ejercicios contextualizados pero también puros de ejercitación.
- *Momento de institucionalización y evaluación:* Tras el debate en clase y los ejercicios trabajados, el docente explicita todas aquellas propiedades y características que se habían intuido durante la sesión anterior y las dificultades encontradas.

Campo 3. Ecuación de la recta

a) Diseño de problemas

En este campo de problemas **se trabajará en profundidad el sistema de representación más abstracta de la función lineal: la expresión algebraica**. Se trabajarán aspectos técnicos motivados por situaciones reales, que necesitan ser modelizadas con ecuaciones. Estudiaremos situaciones en las que se deba calcular la expresión algebraica de una recta en forma explícita, implícita, a partir de dos puntos o de punto-pendiente.

Problema 1. En la salida de una nave al espacio, se tomaron dos puntos como referencia. En el momento de la salida (0 segundos) el cohete estaba en el suelo (0 metros). A los 7 segundos, estaba a 200 metros. Representa estos dos puntos gráficamente. Dibuja la recta que los une y calcula su ecuación.

Problema 2. Calcula la ecuación de la recta de los siguientes apartados. Posteriormente, escribe esta ecuación en forma explícita e implícita.

i) Pasa por el punto $(5,7)$ *y su pendiente es* $m = 3/2$.

ii) Pasa por los puntos $(-2,-4)$ *y* $(0,-7)$.

iii) Pasa por los puntos $(3,3)$ *y* $(-11/9,3)$.

b) Técnicas que se ejercitan con estos problemas.

Las técnicas que se trabajan en este campo de problemas se refieren al cálculo de la ecuación de la recta en su expresión explícita, implícita, a partir de dos puntos o de punto-pendiente.

c) Metodología en su implementación en el aula.

Similar al campo de problemas anterior, éste comprende un área de trabajo más técnico. En general, **se intentará que los alumnos estudien individualmente las técnicas de cálculo precisas, ya que constituyen un trabajo algebraico abstracto.**

Sin embargo, al igual que en el campo de problemas 2, plantearemos cuestiones generales en el grupo clase para generar las ideas intuitivas sobre los conceptos generales sobre los que se está trabajando, como por ejemplo, que por dos puntos solo pasa una recta o que dado un punto y la pendiente se puede definir unívocamente una recta.

d) Tecnologías que justifican las técnicas.

La tecnología que hay detrás de la técnica es la representación algebraica y sus diferentes expresiones. Además, la definición de recta también subyace a las técnicas de cálculo de rectas punto-pendiente o punto-punto.

e) Momentos de estudio.

En este campo de problemas, los momentos de estudio se distribuyen de la siguiente manera:

- *Momento de primer encuentro*: este momento se da en la introducción en clase de la ecuación de la recta y sus diferentes expresiones.
- *Momento exploratorio*: comentamos en el grupo clase si es posible definir una recta con solo dos puntos, o con un punto y la pendiente.
- *Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico:* análogamente al campo de problemas 2, el docente es el encargado aquí de establecer los pasos que constituyen la técnica.
- *Momento de trabajo de la técnica:* reforzamos la técnica presentada con ejercicios propios de ésta. También plantearemos problemas contextualizados para destacar la utilidad de estas técnicas.
- *Momento de institucionalización y evaluación:* Tras el trabajo realizado, el docente procede a señalar todas las propiedades y características de estos conceptos y las dificultades encontradas a lo largo de los momentos anteriores.

Campo 4. Posición relativa de dos rectas

a) <u>Diseño de problemas</u>

En este campo de problemas se trabajarán las funciones lineales desde su expresión gráfica. En concreto, trataremos de interpretar todos los aspectos de estas funciones desde esta representación para poder comprender la situación en la que aparecen dos funciones lineales en el mismo espacio (rectas coincidentes, secantes, paralelas).

Problema 1. Hoy nos vamos de vacaciones a la playa toda la familia. Como somos 8 en total, vamos en dos coches. El primer coche salieron hace 10 minutos y van a 100 km/h. El segundo coche sale ahora y va a la misma velocidad que el primero. ¿Se juntarán en algún momento del trayecto? Representa gráficamente esta situación.

Problema 2. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y describe gráficamente la situación:

i) $y = 3x + 5 \;\; ; \;\; -3x + y - 5 = 0$.

ii) $Punto \;\; (0, 5)$ *y pendiente* $m = 3 \;\; ; \;\; -3x + y + 2 = 0$.

iii) $Punto \;\; (0, 5)$ *y pendiente* $m = 3 \;\; ; \;\; -2x + y - 5 = 0$.

Problema 3. Calcula el punto de corte de los siguientes pares de rectas:

i) $y = -2x + 5 \;\; ; \;\; x + y = 0$.

ii) $y = 5x - 2 \;\; ; \;\; -3x + y + 2 = 0$.

iii) $y = 3x + 5 \;\; ; \;\; -3x + y - 5 = 0$.

b) Técnicas que se ejercitan con estos problemas.

Este campo de problemas va dirigido a ejercitar las técnicas de representación gráfica e interpretación de éstas. En particular, se estudiarán los puntos de corte, pendientes y ordenadas en el origen.

c) Metodología en su implementación en el aula.

Este campo de problemas, al igual que los campos 2 y 3, abarca gran trabajo técnico que se debe trabajar de manera individual. Aunque en este caso, es tan importante la interpretación de los términos gráficos y algebraicos como la técnica de cálculo, así que los problemas que trabajemos en clase podemos proponerlos para realizarlos por parejas, de manera que se fomente la resolución de dudas entre iguales. El docente estará cerca de la realización de las actividades y acompañará el aprendizaje.

d) Tecnologías que justifican las técnicas.

La tecnología que hay detrás de la técnica es la representación gráfica, su interpretación y su relación con los términos algebraicos como la pendiente y la ordenada en el origen.

e) Momentos de estudio.

En este campo de problemas, los momentos de estudio se distribuyen de la siguiente manera:

- *Momento de primer encuentro*: el docente expone una situación, un problema contextualizado en el que aparezcan en su modelización dos funciones lineales.
- *Momento exploratorio*: a partir de la representación gráfica, describimos la situación: rectas secantes, paralelas o coincidentes. En parejas, se plantean intuiciones sobre cómo se distribuyen las rectas representadas.

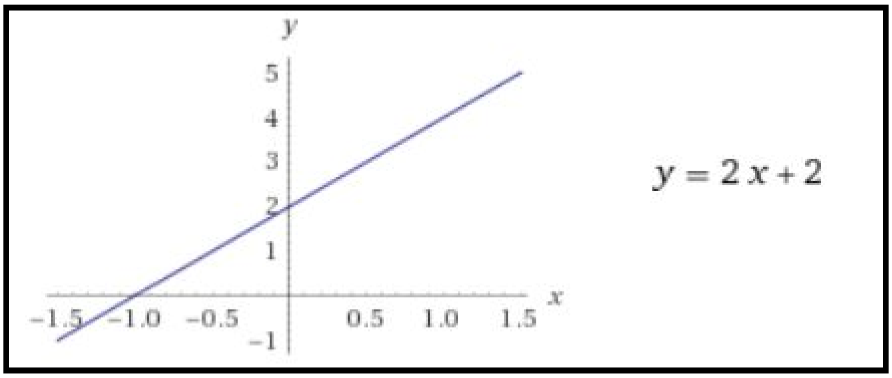
- *Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico:* trataremos guiar la exploración para llegar a determinados resultados como que la pendiente determina si dos rectas son paralelas (coincidentes como caso particular) o secantes.
- *Momento de trabajo de la técnica:* el docente recoge las posibles técnicas y resultados y guía a la clase hacia la dirección de la técnica o técnicas correctas. Plantearemos ejercicios para reforzarla.
- *Momento de institucionalización y evaluación:* El docente será el encargado de presentar los resultados más importantes para institucionalizarlos. Además, también expondrá de manera clara las dificultades encontradas y cómo solucionarlas.

Campo 5. Contextualización sobre problemas

a) <u>Diseño de problemas</u>

El campo de problemas donde se trabaja **la contextualización es transversal al desarrollo de la unidad didáctica**. Son problemas que han de aparecer al <u>comienzo del tema</u> como razón de ser del objeto matemático principal; <u>durante el tema</u> en ejercicios que sitúen el aspecto práctico de cada elemento que estudiemos, y <u>al final de la unidad</u>, donde trabajemos de manera completa todos los aspectos presentados a lo largo del tema. En las últimas sesiones del tema será donde trabajemos de forma explícita este campo. La contextualización puede ser desde perspectivas diferentes: problemas económicos, de ámbito físico o dentro de las propias matemáticas.

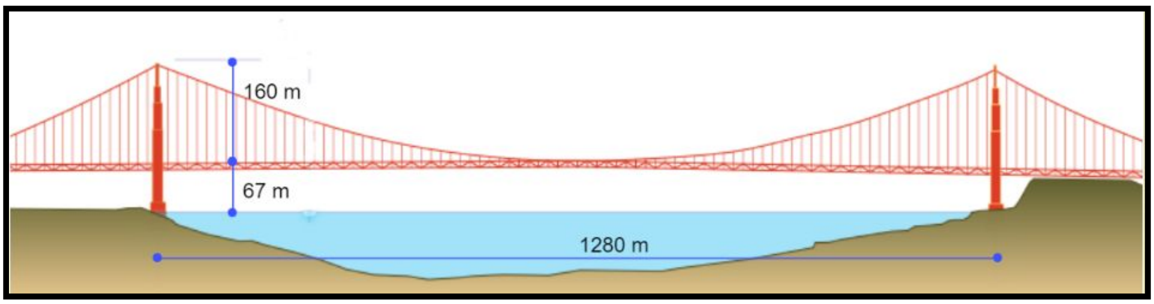
Problema 1. a) Estoy comprando y he visto que un brick de leche cuesta 0,80€. Representa gráficamente la relación del precio de la compra en función del número de bricks. b) Escribe el enunciado de una situación que pueda describirse mediante la siguiente función:



Problema 2. Estoy yendo a mi pueblo en bicicleta desde mi casa y voy a 20 km/h. Yo he salido hace media hora y ahora salen mis padres desde mi casa también, y van a 70 km/h. ¿En qué kilómetro me alcanzarán?

Problema 3. El área de un cuadrado de lado L es L^2. *Dibuja la función del área del cuadrado para valores positivos del lado L.*

Problema 4. El Golden Gate, el famoso puente colgante de San Francisco, está suspendido de dos enormes cables que adoptan forma de parábola y tocan la calzada en el centro del puente. Sus medidas se indican en la figura. ¿Cuál es la altura de los cables a 400 metros del centro del puente? - Problema obtenido de la web Proyecto Descartes.



b) Técnicas que se ejercitan con estos problemas.

La técnica principal que aparecen en estos problemas es la modelización en términos matemáticos. Normalmente, otras técnicas también entrarán en juego, dependiendo de lo que se requiera en cada ejercicio.

c) Metodología en su implementación en el aula.

Este campo de problemas da pie a poder trabajarse en pequeños grupos de 3 o 4 alumnos. El aprendizaje colaborativo y por descubrimiento pueden ser potentes herramientas de aprendizaje en tareas de modelización.

d) Tecnologías que justifican las técnicas.

La tecnología que hay detrás de la técnica es la representación gráfica y su interpretación en términos de su contexto.

e) Momentos de estudio.

En este campo de problemas, los momentos de estudio se distribuyen de la siguiente manera:

- *Momento de primer encuentro*: este momento se da en la primera lectura del problema de contextualización.
- *Momento exploratorio*: en pequeños grupos se producen intentos de modelización, de técnicas que posibiliten la resolución del problema.
- *Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico:* en la propia realización del ejercicio, se van descartando ciertas estrategias que no son apropiadas.
- *Momento de trabajo de la técnica:* conforme se van presentando más problemas de situaciones reales, se van adquiriendo competencias de modelización de la realidad.

- *Momento de institucionalización y evaluación:* Tras el trabajo realizado, el docente procede a indicar qué propiedades caracterizan la modelización y las dificultades encontradas.

F. Sobre la secuencia didáctica

En esta sección detallaremos cómo trabajaremos en relación con el tiempo nuestra propuesta didáctica presentada a lo largo del trabajo. Para la organización y secuenciación de nuestra propuesta, debemos atender a las características del curso académico. Siguiendo el currículo de 3º ESO, **el tema de funciones lineales y cuadráticas suele encontrarse en el segundo trimestre del curso**, justo después de haber trabajado el tema de funciones y representaciones. Estos dos temas constituyen las unidades didácticas referidas al bloque de Funciones.

Además, la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en 3º ESO cuentan con 3 horas lectivas a la semana, lo que supone un descenso de horas con respecto a los años anteriores.

Con todo esto, **proponemos una secuencia didáctica de 8 sesiones**, que supondrán el trabajo durante 2 semanas y 2 días.

La secuencia en las sesiones de clase es la siguiente:

SESIÓN	**ACTIVIDADES**	**DURACIÓN**
Sesión 1	Sesión inicial: debate	30’
	Prueba inicial	20’
Sesión 2	Campos de problemas 1: *recta*	50’
Sesión 3	Campos de problemas 2*: pendiente y ordenada en el origen*	50’
Sesión 4	Campos de problemas 3	50’
Sesión 5	Campos de problemas 4	50’
Sesión 6	Campos de problemas 1: *parábola*	30’

	Campos de problemas 2: *vértice*	20’
Sesión 7	Campos de problemas 5	50’
Sesión 8	Sesión de evaluación	50’

Notar que la sesión 1 se propone como sesión inicial en la que nos centraremos en notificar cuál es el nivel académico de los alumnos sobre el tema de las funciones lineales. A partir de estos resultados, orientaremos nuestra unidad didáctica a reforzar aquellos aspectos que presenten más deficiencias.

Los campos de problemas 5 constituyen un elemento transversal durante todas las sesiones, si bien solo se trabajarán de manera exclusiva en la sesión 7. Es decir, también propondremos problemas contextualizados en diversas situaciones a lo largo de las otras 6 sesiones.

Si es posible, **es conveniente reservar una novena sesión para realizar una recapitulación de los resultados del bloque de Funciones.** En esta sesión, trataríamos de comentar las dudas y resultados de los exámenes de los dos temas de este bloque y realizar algunos ejercicios para afianzar y solventar dichas dudas.

G. Sobre la evaluación

La evaluación es un proceso que influye de manera directa en cómo trabajan los estudiantes y qué tipos de aprendizajes realizan. Para que la evaluación sea un elemento que favorezca los procesos de aprendizaje, **debe hacerse desde un punto de vista formativo, implicando al alumnado en su aprendizaje** y convertirlo en parte activa y responsable de éste.

En este sentido, los procesos de evaluación cumplen una función pedagógica: *evaluar para aprender*. Para ello, **los momentos de evaluación deben distribuirse de manera natural en el proceso diario de instrucción** (evaluación continua) mediante una dinámica interactiva, gestionando puestas en común sobre lo tratado en clase. Con estas prácticas, el docente es capaz de controlar el nivel de aprendizaje que lleva el aula en todo momento para actuar en las dificultades cuando sea necesario.

Cabe destacar que la evaluación es un proceso que integra todas las asignaturas en relación al logro de los objetivos de la etapa y el desarrollo de las competencias clave. No obstante, desde cada especialidad se estipularán criterios para evaluar el aprendizaje en esa materia.

En nuestro caso, proponemos varios momentos de evaluación con distintas orientaciones.

- Una **evaluación inicial al comienzo de la unidad**, con finalidad diagnóstica: conocer el nivel de la clase con respecto a los objetos matemáticos relacionados. Esta evaluación ya la hemos comentado en apartados anteriores y la llevaremos a cabo durante la primera sesión.
- **Evaluaciones de tipo formativo y contínuo a lo largo de la unidad**, mediante las actividades en grupo e individuales propuestas en clase y para casa.
- Una **evaluación final de carácter sumativo**. La realizaremos al acabar la unidad didáctica mediante una prueba escrita, que conllevará una calificación cuantitativa.

En los siguientes apartados, detallaremos y argumentaremos el contenido de esta prueba escrita.

I. Diseño de una prueba escrita

Esta evaluación es de carácter sumativo, es decir, que recogerá la totalidad de los contenidos trabajados con la finalidad de determinar si se han conseguido o no los objetivos de la unidad. En particular, planteamos 5 problemas en los que están presentes los cinco campos de problemas propuestos en el apartado A de este trabajo.

En primer lugar, planteamos un problema de contexto real en el que se intentará evaluar la capacidad de modelización, el conocimiento sobre las diferentes representaciones de la función lineal y sus conversiones (tareas cognitivas de Duval). En este ejercicio aparecen los **campos de problemas 1 y 5.**

1. He salido de mi casa a dar una vuelta en bicicleta y llevo una velocidad media de 16 km/h.

   a) (0,5 puntos) ¿A qué distancia de casa estaré cuando lleve media hora? ¿Y cuando lleve 2 horas? Justifica tu respuesta.

   b) (1 punto) Representa gráficamente la función *recorrido (km) – tiempo (horas)*. ¿Qué tipo de función es?

   c) (1 punto) Calcula la ecuación de dicha función.

En el segundo ejercicio, se plantea una actividad de carácter técnico sobre el **campo de problemas 2.** Se pide el estudio de los puntos y términos característicos de una función cuadrática a partir de su expresión algebraica, así como su representación gráfica.

2. (2 puntos) Calcula el vértice y los cortes con los ejes de la siguiente función:

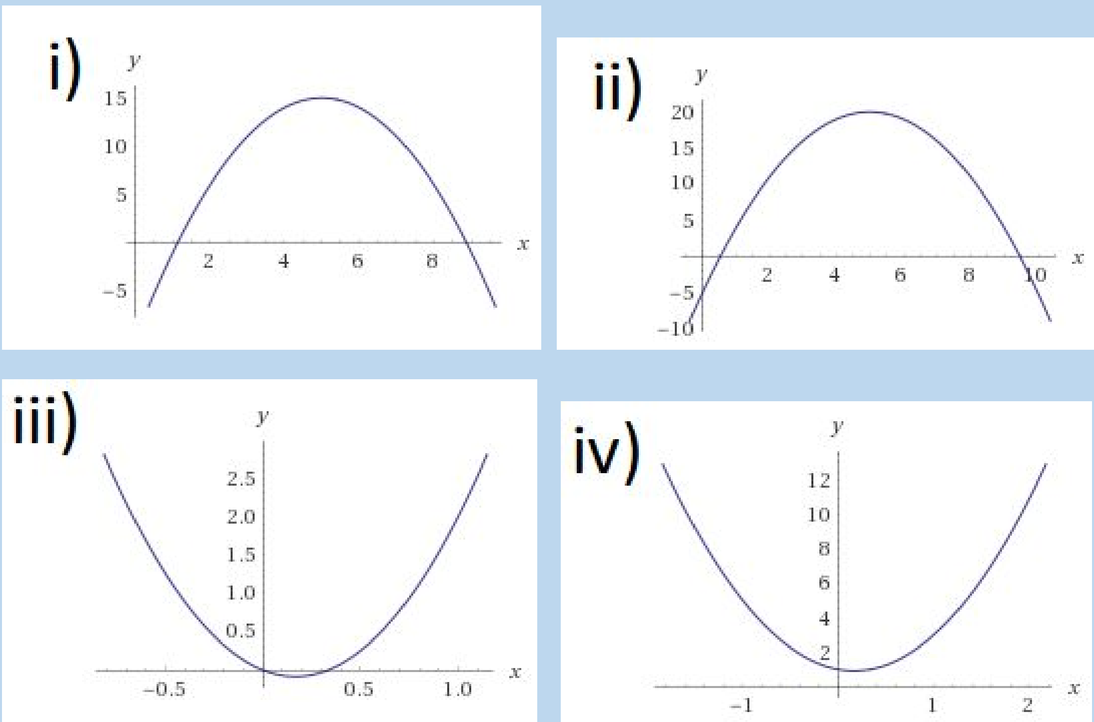
$$y = -x^2 + 3x + 5$$

Representa gráficamente la función a partir de dichos puntos.

El tercer ejercicio está basado en una de las actividades presentadas en el libro *Shell Centre.* Aborda el estudio de funciones cuadráticas referido en el **campo de problemas 1 y 2.** Se trata de establecer propiedades que identifiquen representaciones algebraicas y gráficas de una misma función. Para ello, pueden utilizar otras expresiones como la tabular o la verbal, o calcular términos característicos como la ordenada en el origen o el vértice.

3. (1,5 puntos) Relaciona estas dos funciones con sus representaciones gráficas. Justifica tu respuesta. (Pista: hay dos gráficas que sobran.)

a) $y = -x + 3x^2$ b) $y = -(x-5)^2 + 15$



El cuarto ejercicio también se trata de una actividad de ejercitación de técnica, relacionado con el **campo de problemas 3**. En concreto, este ejercicio comprende el estudio algebraico de dos rectas a partir de dos puntos y de punto-pendiente.

4. (1,5 puntos) Calcula la ecuación de las rectas que cumplen los siguientes apartados:

    Recta A: Pasa por los puntos (-3,-2), (0,-4)

    Recta B: Pasa por el punto (1,4) y su pendiente es 1/2.

Finalmente, proponemos un problema contextualizado sobre el estudio de la posición relativa entre dos rectas. En este ejercicio participan conceptos trabajados en los **campos de problemas 4 y 5**.

5. (2,5 puntos) Para moverse en Zaragoza, es frecuente utilizar el autobús o el tranvía. Un billete sencillo sirve para un trayecto y cuesta 1,35€. Si tienes la Tarjeta Bus, cada trayecto cuesta 0,72€ pero crear la tarjeta cuesta 5€. Mi primo viene de visita y no sabe si comprarse la Tarjeta Bus o comprar billete sencillo cada trayecto. ¿Qué le recomiendas que haga, dependiendo del número de viajes, para que le salga más barato? Representa gráficamente las dos funciones.

Con estos cinco problemas, completamos la prueba escrita que corresponderá a la evaluación final de la unidad. El tiempo estimado de la duración del examen será 50 minutos, es decir, una sesión de clase.

II. Aspectos del conocimiento de los alumnos que se pretenden evaluar con cada una de las preguntas

Pregunta 1

La primera pregunta trata el primer y el quinto campo de problemas, es decir, va dirigido a evaluar el dominio de las distintas representaciones de la función lineal y la modelización de una situación real mediante estas funciones.

De acuerdo con la Orden ECD/489/2016 de 26 de mayo, los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje ligados a este problema son los siguientes:

- Crit.MAAC.4.2 Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.
  - Est.MAAC.4.2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.
  - Est.MAAC.4.2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

En concreto, la tarea principal que se pide en este ejercicio es **interpretar el enunciado del problema en términos numéricos, gráficos y algebraicos**. Como tareas auxiliares destacamos las siguientes:

1. **Cálculo o interpretación de la pendiente y la ordenada en el origen**.
2. **Buena elección de la escala en la gráfica**.
3. **Planteamiento para la obtención de la expresión algebraica,** ya sea desde la reinterpretación de términos gráficos, desde la técnica de punto-punto o punto-pendiente.
4. **Aplicación de la técnica para el cálculo de la ecuación**.

De estas cuatro tareas 1 y 3 las consideraremos tareas auxiliares específicas, mientras que las otras dos, generales.

Pregunta 2

Este ejercicio está dirigido a evaluar el conocimiento sobre las funciones cuadráticas. Se trata de un ejercicio técnico con el que se trabaja el segundo campo de problemas, cuya técnicas abarcan la obtención de los términos característicos de las funciones lineales y cuadráticas. En nuestro caso, vértice de la parábola y corte con los ejes, así como su expresión gráfica .

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje sobre los que se basa este ejercicio son los siguientes:

- Crit.MAAC.4.3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.
  - Est.MAAC.4.3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.

Las tareas principales de este ejercicio son las siguientes:

1. Conocimiento de la **fórmula del vértice** y cómo aplicarla.
2. **Planteamiento del cálculo de cortes con los ejes desde la expresión algebraica**, es decir, corte con el eje X equivale a $y = 0$, y viceversa.
3. **Representación gráfica** de los puntos característicos seleccionados y conocimiento del trazo de la función cuadrática.

Como tareas auxiliares destacamos las siguientes:

1. **Operaciones aritméticas** del cálculo del vértice y el corte con los ejes.
2. **Evaluación en la ecuación del valor de x en el vértice** para obtener la otra coordenada del vértice.
3. **Cálculo de la solución a la ecuación de segundo grado,** en el corte de la función con el eje X.
4. **Buena elección de la escala de la gráfica**.

En este caso, la tarea auxiliar 2 la consideramos específica, mientras que las otras tres son generales.

Pregunta 3

En este ejercicio, junto con el anterior, completan la evaluación sobre funciones cuadráticas. En concreto, este ejercicio 3 trabajamos el campo de problemas 1 y 2. Se trata de un ejercicio breve de identificación de diferentes expresiones.

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en los que basamos este ejercicio son los siguientes:

- Crit.MAAC.4.3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.
    - Est.MAAC.4.3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.

Al ser un ejercicio breve y conciso, tan solo destacamos una tarea principal: **reconocimiento de las principales características de las funciones cuadráticas**, ya sea el cálculo del vértice, de los cortes con los ejes o su comportamiento en las ramas.

Dentro de las tareas auxiliares específicas se pueden dar las siguientes:

1. Cálculo del **vértice**.
2. Cálculo de los **cortes con los ejes**.
3. Cálculo de algunos **puntos concretos** o realización de una **tabla de valores**.
4. **Expresión verbal** del comportamiento de la función.
5. **Conversión total** de la función desde la expresión algebraica a gráfica.

Las tareas auxiliares generales se derivan del proceso de realización de las tareas anteriores:

1. **Operaciones aritméticas**.
2. **Operaciones algebraicas**.
3. **Elección correcta de escala** para la representación gráfica.

Pregunta 4

Este ejercicio evalúa el conocimiento sobre las técnicas que sustentan el campo de problemas 3. Se pide el estudio de la expresión algebraica de una función lineal a partir de dos puntos y de punto y pendiente. No determinamos si la expresión debe ser explícita o implícita, a elección del alumno.

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje relacionados con este ejercicio son los siguientes:

- Crit.MAAC.4.2 Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.
    - Est.MAAC.4.2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.

Las tareas principales de este ejercicio son las siguientes:

1. Conocimiento del **cálculo de la recta a partir de dos puntos.**
2. Conocimiento del **cálculo de la recta a partir de un punto y la pendiente.**

Como tarea auxiliar destacamos tan sólo las **operaciones aritméticas** derivadas de la aplicación de las fórmulas o razonamiento.

Pregunta 5

Este último problema va dirigido a evaluar el grado de aprendizaje del alumnado sobre los campos de problemas 4 y 5. Se trata de un problema contextualizado sobre una situación real que se modeliza a través de dos funciones lineales. El trabajo de este problema también recoge el estudio de la posición relativa de estas dos rectas.

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje relacionados a este problema son los siguientes:

- Crit.MAAC.4.2 Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.
    - Est.MAAC.4.2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.
    - Est.MAAC.4.2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.

Las tareas principales de este ejercicio son las siguientes:

1. Reconocimiento de la **modelización de la situación mediante una función lineal.**
2. Identificación de la **pendiente y la ordenada en el origen** de cada recta.

Como tareas auxiliares destacamos las siguientes:

1. Identificación de la **constante de proporcionalidad como la pendiente de la recta.**
2. **Representación gráfica** de cada recta.
3. **Estudio de la posición relativa**, ya sea mediante razonamientos algebraicos o gráficos.
4. **Operaciones aritméticas y algebraicas**.

De las tareas auxiliares, tan solo la cuarta la consideramos general, las demás son tareas auxiliares específicas.

III. Respuestas esperadas en función del conocimiento de los alumnos

En este apartado, recogeremos las respuestas esperada en cada una de las preguntas, así como los errores más esperables.

Pregunta 1

En este problema el alumno debe comenzar con una pequeña interpretación del enunciado. En el apartado a), se piden dos datos que se pueden obtener **de manera lógica sin hacer operaciones (sin alejarnos de la contextualización)**, si se entiende bien el enunciado. Sin embargo, podemos encontrarnos con alumnos que, debido a la automatización en el aprendizaje, comiencen **calculando la expresión algebraica** de la función para que, a partir de ahí contesten a los 3 apartados. Incluso, como se trata de una **situación de proporcionalidad directa**, puede que algún alumno aplique técnicas de este bloque como la regla de tres para calcularlo. Son caminos diferentes, algunos más complicados que otros y que pueden dar lugar a más errores. En todo caso, son respuestas correctas.

En el siguiente apartado, pueden darse diferentes estrategias. Para identificar la **función lineal como modelo matemático** del problema, puede que se **interprete por el contexto o que se dibujen los 2 (o 3) puntos extraídos del apartado a)** y se llegue a esta conclusión. Por otro lado, para la representación gráfica pueden **dibujarse los puntos del apartado a)** o que se tome uno de esos (o la ordenada en el origen) y se identifique el **concepto de velocidad como la pendiente de la función**.

Finalmente, en el apartado c) se puede calcular a partir de las técnicas **punto-punto, punto-pendiente,** o mediante la **interpretación gráfica de la pendiente y la ordenada en el origen.**

Pregunta 2

Esta pregunta, al ser un ejercicio tan técnico, las estrategias están determinadas por las técnicas exigidas. Los alumnos deben realizar el ejercicio **mediante la fórmula**

del vértice y la sustitución de las variables por 0 en el cálculo de los cortes con los ejes. Otra estrategia sería realizar la representación gráfica a partir de varios puntos y, **desde esta gráfica, deducir los cortes con los ejes y los vértices**. Este cálculo sería una estimación "a ojo" y la gráfica se realizaría antes de conocer estos puntos, por lo que será incorrecta.

Pregunta 3

El conjunto de estrategias de resolución en este ejercicio es bastante amplio. Recogemos a continuación las diferentes respuestas esperadas:

- Cálculo de uno o varios puntos (**tabla de valores**) a partir de la función algebraica.
- Cálculo del **vértice**.
- Cálculo de los **cortes con los ejes**.
- Razonamiento verbal sobre la **orientación de las ramas de la parábola**.

Cualquiera de estos caminos o la combinación de varios, pueden llevar a la resolución del ejercicio.

Pregunta 4

Para ambos apartados, la estrategia marcada es **calcular la pendiente y la ordenada en el origen**. Para el apartado A, pueden deducir la razón entre el incremento de los valores de y con respecto a los de x para calcular la pendiente, y a partir de ésta, calcular la ordenada en el origen. Este segundo paso es el que se aplica también en el apartado B.

Otra estrategia puede ser **apoyarse en una representación gráfica** de la función, aunque obtener los valores "a ojo" puede derivar en errores.

Pregunta 5

Este problema es más abierto y puede dar lugar a muchas estrategias de resolución. No obstante, el ejercicio también pide la **representación gráfica** de ambas rectas, luego un primer acercamiento puede venir de esta expresión. Aquí se pueden dar una interpretación correcta de las pendientes y las ordenadas en el origen, o puede que se identifique 1.35€ como valor constante de la función, no como pendiente.

Posteriormente, el apoyo visual puede derivar en una **resolución "a ojo"** en la intersección de ambas rectas, lo que puede derivar en errores de aproximación. También pueden **obtener las expresiones algebraicas** (de manera similar al ejercicio 4) de ambas funciones y realizar un estudio analítico de la situación.

IV. Criterios de calificación

En este apartado vamos a concretar una guía de corrección de esta prueba escrita en función de las posibles resoluciones y otorgando el peso correspondiente a cada tarea dentro de los cinco problemas.

La calificación de la prueba será sobre 10 puntos y los distribuimos en los cinco ejercicios de la siguiente manera:

Pregunta	Calificación máxima
Problema 1	2,5 puntos
Problema 2	2 puntos
Problema 3	1,5 puntos
Problema 4	1,5 puntos
Problema 5	2,5 puntos

De esta manera, la evaluación sobre funciones cuadráticas tienen un peso de 3,5 puntos sobre 10, un valor proporcional al tiempo dedicado a su estudio a lo largo de la unidad. Además, a los problemas de contextualización les hemos dado especial importancia durante el desarrollo del tema, así que en la prueba ocupan el 50% de la calificación total. El trabajo técnico con rectas, explícito en el ejercicio 4 e implícito en el problema 5, acaba ocupando 4 puntos del total.

Para la calificación de cada una de las preguntas seguiremos el **modelo de tercios.** Este modelo de corrección se basa en la penalización de los errores en función de la categoría de la tarea en los que se den. Los errores que afectan a tareas principales pueden ser penalizados con la totalidad de la puntuación del ejercicio; si afectan a tareas auxiliares específicas pueden acarrear una penalización de hasta dos tercios de la calificación total del ejercicio; y finalmente, si los errores se encuentran en tareas auxiliares generales, se podrán restar como máximo un tercio de la puntuación.

A continuación, detallamos este modelo de tercios para cada una de las preguntas:

Calificación Pregunta 1

La calificación total de la pregunta es 2,5 puntos, que los repartimos en 0,5, 1, 1 en cada uno de los apartados respectivamente. Las penalizaciones en función de los errores en cada tarea son las siguientes:

- Interpretación numérica, gráfica o algebraica deficiente: hasta el total de la puntuación de cada apartado.
- Errores en el cálculo o interpretación de la pendiente y la ordenada en el origen: hasta 0,66 en los apartados b y c.
- Mala aplicación de técnicas para la obtención de la ecuación: hasta 0,66 en el apartado c.
- Errores en las operaciones aritméticas o algebraicas: hasta 0,16/0,33 en los apartados a / b y c respectivamente.
- Mala elección de la escala en la gráfica: hasta 0,33 en el apartado b.

Calificación Pregunta 2

La calificación total de este ejercicio es de 2 puntos. El modelo de tercios lo aplicamos de la siguiente manera:

- Mala aplicación de la fórmula del vértice y de la técnica de los cortes con los ejes: hasta 2 puntos.
- No representa correctamente la gráfica: hasta 1 punto.
- Ausencia o mala evaluación de la segunda coordenada en el punto del vértice o en los cortes con los ejes: hasta 1,33 puntos.
- Errores en operaciones aritméticas o algebraicas: hasta 0,66 puntos.
- Mala elección de la escala en la representación gráfica: hasta 0,66 puntos.

Calificación Pregunta 3

Este ejercicio es más breve que los anteriores y tiene una dirección específica: saber reconocer representaciones algebraicas y gráficas de una misma función cuadrática. Como también el ejercicio anterior trata de parábolas, la puntuación es menor: 1,5 puntos.

El modelo de tercios en este ejercicio se aplicará de la siguiente manera:

- Ausencia de razonamiento / identificación errónea de alguna característica de la función cuadrática: hasta 1,5 puntos.
- Mala aplicación de la técnica de cálculo del vértice o de cortes con los ejes: hasta 1 punto.
- Errores en operaciones aritméticas o algebraicas: hasta 0,5 puntos.
- Mala elección de la escala en la representación gráfica: hasta 0,5 puntos.

Calificación Pregunta 4

La calificación total de esta pregunta es 1,5 puntos, ya que es un ejercicio técnico corto. La penalización del modelo de tercios se distribuye siguiendo estos guiones:

- Aplicación errónea de la técnica del cálculo de la recta a partir de dos puntos y de punto-pendiente: hasta 1,5 puntos.
- Interpretación deficiente de los términos pendiente y ordenada en el origen sobre su expresión algebraica: hasta 1 punto.
- Falta de coherencia entre la representación gráfica y la algebraica: hasta 1 punto.

- Errores en operaciones aritméticas o algebraicas: hasta 0,5 puntos.
- Mala elección de la escala en la representación gráfica: hasta 0,5 puntos.

Calificación Pregunta 5

Este problema final abarca un estudio profundo de las funciones lineales sobre una contextualización. Por ello, la calificación es de 2,5 puntos. El modelo de tercios en esta pregunta se distribuye de la siguiente manera:

- Modelización errónea de la situación: hasta 2,5 puntos.
- No identificación de la pendiente y la ordenada en el origen de cada recta: hasta 2,5 puntos.
- Mala interpretación de la constante de proporcionalidad como la pendiente de la recta: hasta 1,66 puntos.
- Representación gráfica incorrecta de cada recta: hasta 1,66 puntos.
- Ausencia/error en el estudio de la posición relativa de las rectas: hasta 1,66 puntos.
- Errores en operaciones aritméticas o algebraicas: hasta 0,83 puntos.
- Mala elección de la escala en la representación gráfica: hasta 0,83 puntos.

H. Bibliografía y páginas web

Alayo, F. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas,* Shell Centre for Mathematical Education. Madrid: MEC Centro de publicaciones.

Alcaide F., Hernández J., Serrano E., Moreno M., Pérez A., (2016). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO*. Madrid, Ediciones SM.

Alcaide F., Hernández J., Serrano E., Moreno M., Pérez A., (2016). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO. Recursos para el profesor.* Madrid, Ediciones SM.

Alcalde J., Amelivia A., Gonzalez J., Jiménez S., (2019). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO.* Aravaca (Madrid), Mc Graw Hill / Interamericana de España, S.L.

Alonso Borrego, J. L. y García Cebrian, M. J. (2016). *3º ESO Orientación enseñanzas aplicadas / Funciones linales y cuadráticas.* Proyecto Descartes. Recuperado de https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_funciones_lineales-JS-apli/index.htm.

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.

Colera J., Oliveira M.J., Gaztelu I., Colera R., (2019) *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO*. Madrid, ANAYA.

Colera J., Oliveira M.J., Gaztelu I., Colera R., (2019). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO. Propuesta didáctica.* Madrid, Grupo ANAYA.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penseé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Fabra M. y Deulofeu J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos". *Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, vol. 3, nº 2, pp. 207-230.

Janvier, C. (1987). Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. *Lawrence Erlbaum Associates*. Londres.

Muñoz-Escolano J. M.y Martínez-Juste S. (2020). *Innovación e investigación educativa en matemáticas.* [Apuntes académicos]. ADDUnizar.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, *Boletín Oficial de Aragón,* 2 junio de 2016, nº 105, pp. 12640-13458.

Ortega T. y Pecharromán C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación*, nº 12 (2), pp. 209-221.

Paul, C. J. (2005). *Historia de las matemáticas.* Siglo XXI de España Editores, SA.

Sastre Vázquez, P., Rey, G., y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de la Educación Matemática UNIÓN*, número 16, p. 141-155.

Sierra M., González M.T. y López C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula,* número 10, p. 89-104.

Soto M., Herrera C.G. y Pereyra N.E. (2019). Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. *Revista Iberoamericana de la Educación Matemática UNIÓN*, número 55, p. 71-84.

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital matemática, educación e internet,* 2-17.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of exact Sciences*, 16(1), 37-85.

ANEXO I: Problemas resueltos

Capítulo D, ap. III:

Solución a los problemas de razón de ser

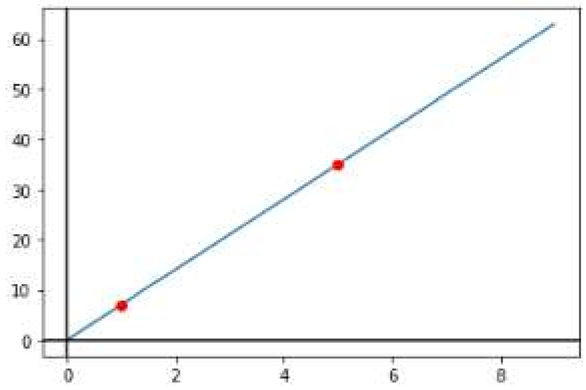
PROBLEMA 1

El mismo día que nació mi hermana, mis padres adoptaron un cachorrito recién nacido, Otri. Se dice que un año para los seres humanos equivalen a 7 “años de perro”. Si mi hermana tiene ahora 5 años:

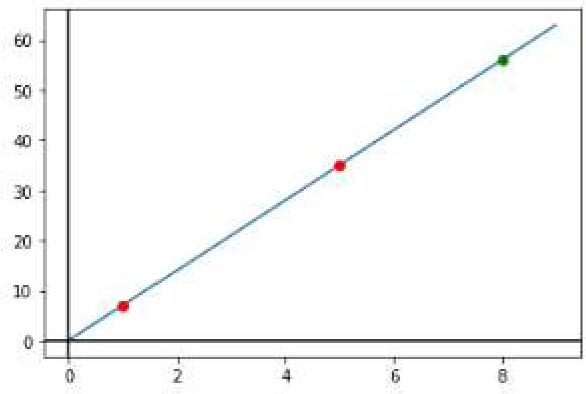
a. ¿Cuántos “años de perro” tiene ahora Otri?
b. Representa gráficamente esta situación. ¿Sabes qué nombre tiene esta función?
c. Fijándote en la gráfica, ¿cuántos tendrá mi hermana cuando Otri tenga 56 “años de perro”?

Solución:

a. Cada año de mi hermana son 7 para Otri.
   Entonces, 5 años para mi hermana serán $5 \cdot 7 = 35$ años para Otri.
b. Es una recta.



c. Mi hermana tendrá 8 años.



PROBLEMA 2

La NASA acaba de enviar un nuevo satélite para orbitar alrededor de Saturno y estudiar su composición a los pocos segundos de despegar se detecta un fallo en el motor y se pierde el control sobre el satélite, solo se sabe que su trayectoria es la siguiente:

$$a = 200s - 5s^2$$

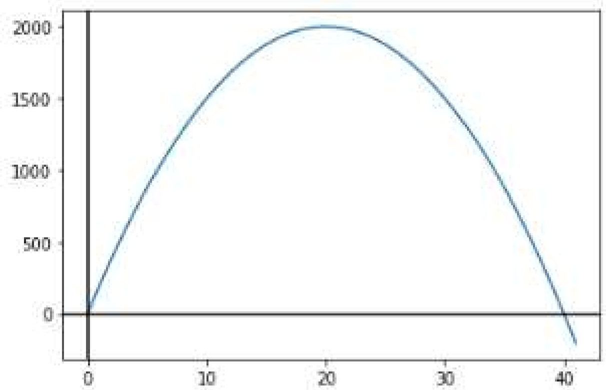
En la ecuación anterior, 'a' es la altura en metros y 's' el tiempo en segundos. Si este suceso se ha detectado a los 10 segundos después de que despegara el satélite:

a. ¿A cuántos metros estaba el satélite cuando empezó a fallar?
b. Representa gráficamente la función que describe el satélite.
c. Describe con tus propias palabras la situación que acabas de representar.
d. ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará?
e. Suponiendo que el satélite sube y baja verticalmente, ¿cuánto tiempo tienen los operarios de la zona para salir del lugar de despegue antes de que caiga el satélite?

Solución:

a. $s = 10$ implica que $a = 200 \cdot 10 - 5 \cdot 10^2 = 1500$ metros.

b.



c. El satélite comenzó subiendo bien, pero como ocurre un fallo, empieza a subir más lento hasta que empieza a bajar.

d. En la gráfica vemos que volverá a estar en el suelo en el segundo 40. En la ecuación:

$$0 = 200 \cdot x - 5 \cdot x^2 \qquad => \qquad 0 = (200 - 5 \cdot x) \cdot x$$

Entonces $x = 0$ ó $x = \frac{200}{5} = 40$ segundos. Así pues, el satélite estará en el suelo en el segundo 0 (al comenzar) y en el 40, que caerá sobre la zona.

Capítulo G, ap. I:

Solución a los problemas del examen

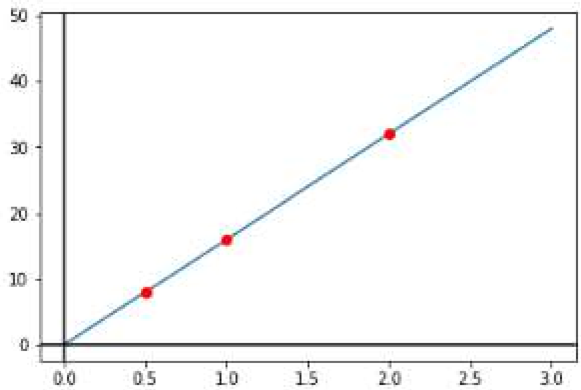
1. He salido de mi casa a dar una vuelta en bicicleta y llevo una velocidad media de 16 km/h.

   a. (0,5 puntos) ¿A qué distancia de casa estaré cuando lleve media hora? ¿Y cuando lleve 2 horas? Justifica tu respuesta.
   b. (1 punto) Representa gráficamente la función *recorrido (km) – tiempo (horas)*. ¿Qué tipo de función es?
   c. (1 punto) Calcula la ecuación de dicha función.

Solución:

a. Si va a 16 km/h, en media hora recorrerá la mitad de distancia que en una hora, es decir, **8 kilómetros**; y en 2 horas, el doble: **32 kilómetros**.

b. Es una recta.



c. La velocidad nos indica la pendiente: 16. La ordenada en el origen es 0, ya que al inicio, he recorrido 0 metros. Así pues, la ecuación es:

$$y = 16x$$

2. (2 puntos) Calcula el vértice y los cortes con los ejes de la siguiente función:

$$y = -x^2 + 3x + 4$$

Representa gráficamente la función a partir de dichos puntos.

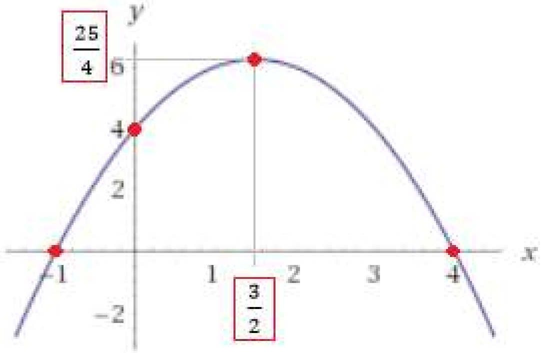
Solución:

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$; $y = \frac{-9}{4} + \frac{9}{2} + 4 = \frac{25}{4}$. El vértice está en el punto ($\frac{3}{2}$, $\frac{25}{4}$).

Cortes con los ejes: $x = 0\,; y = 4.$

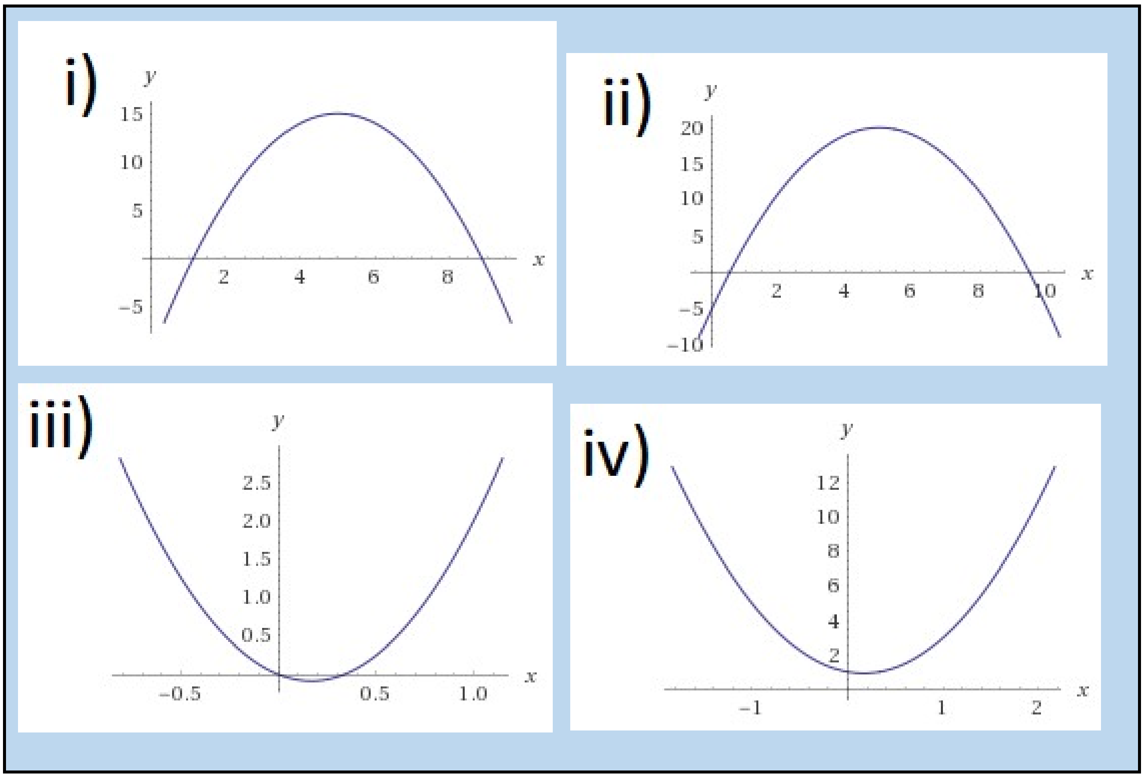
$$y = 0\,; x = \frac{-3 \mp \sqrt{9+4\cdot 4}}{-2} = \{-1,4\}.$$

Gráfica:



3. (1,5 puntos) Relaciona estas dos funciones con sus representaciones gráficas. Justifica tu respuesta. (Pista: hay dos gráficas que sobran.)

a) $y = -x + 3x^2$ b) $y = -(x-5)^2 + 15$



Solución: *(Posible respuesta)*

- La ecuación a) tiene asociada la gráfica iii), porque el coeficiente del x^2 es positivo y por tanto las ramas de la parábola van hacia valores positivos y más grandes, y además pasa por el punto (0,0).
- La ecuación b) tiene asociada la parábola i), porque pasa por el punto (0,15).

4. (1,5 puntos) Calcula la ecuación de las rectas que cumplen los siguientes apartados:

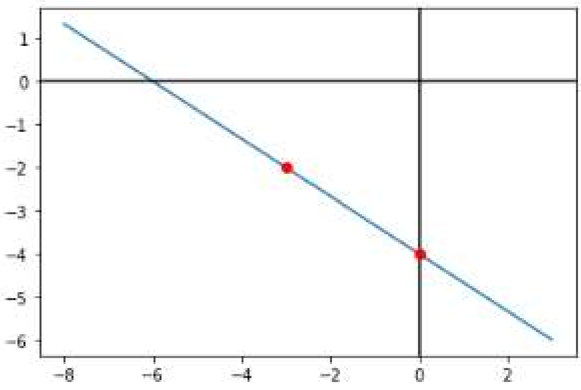
Recta A: Pasa por los puntos (-3,-2), (0,-4)

Recta B: Pasa por el punto (1,4) y su pendiente es 1/2.

Solución: *(Posible respuesta)*

Recta A:

Por cada 3 puntos que avanza la x, la y avanza 2 "hacia abajo", luego la pendiente será $-\frac{2}{3}$. Además, la ordenada en el origen la da el enunciado: -4.

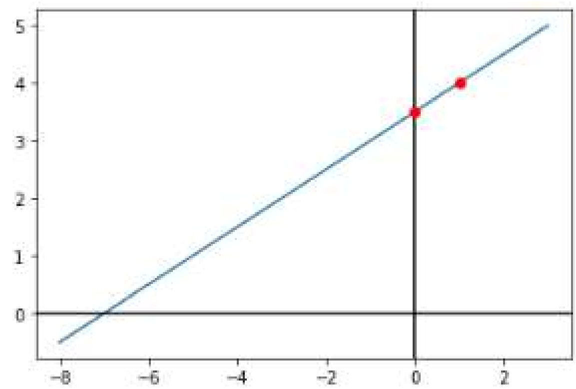


Así pues la recta es: $y = -\frac{2}{3}x - 4$

Recta B:

En el punto $x = 1$, la $y = 4$. Como la pendiente es $\frac{1}{2}$, la ordenada en el origen valdrá $\frac{7}{2}$.

Así pues, la ecuación es: $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

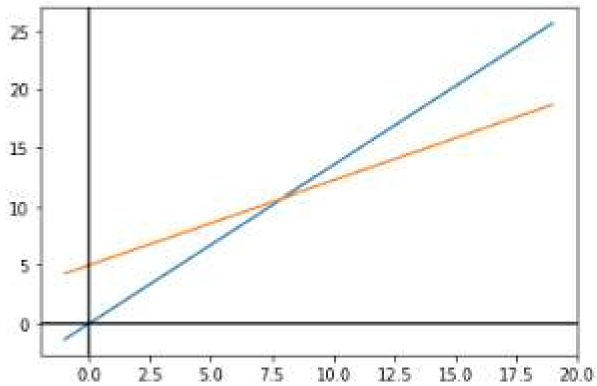


5. (2,5 puntos) Para moverse en Zaragoza, es frecuente utilizar el autobús o el tranvía. Un billete sencillo sirve para un trayecto y cuesta 1,35€. Si tienes la Tarjeta Bus, cada trayecto cuesta 0,72€ pero crear la tarjeta cuesta 5€. Mi primo viene de visita y no sabe si comprarse la Tarjeta Bus o comprar billete sencillo cada trayecto. ¿Qué le recomiendas que haga, dependiendo del número de viajes, para que le salga más barato? Representa gráficamente las dos funciones.

Solución:

Recta billete sencillo (AZUL): $y = 1'35x$

Recta Tarjeta Bus (NARANJA): $y = 0'72x + 5$



Parece que si utilizas pocos viajes, es más barato comprar billetes sencillos, pero si son muchos, mejor comprar la Tarjeta Bus. ¿A partir de cuántos viajes es más barato la Tarjeta Bus?

$$1'35x = 0'72x + 5$$

$$0'63x = 5$$

$$x = \frac{5}{0'63} = 7'9365 \ldots$$

Es decir, **si va a hacer 8 viajes o más, mejor que se compre la Tarjeta Bus. Si va a hacer menos de 8 viajes, que compre un billete sencillo en cada trayecto**.